НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
Інститут прикладного системного аналізу
Кафедра математичних методів системного аналізу

До захисту допущено
В. о. завідувача кафедри
__________ О.Л. Тимощук
«___»_____________20__ р.

Дипломна робота

на здобуття ступеня бакалавра
за освітньо-професійною програмою «Системний аналіз і управління»
спеціальності 124 "Системний аналіз"
на тему: «Порівняльний аналіз секвенціального та функціонального підходів до побудови узагальненої функції»

Виконав:
Студент IV курсу, групи КА-61
Шарапов Євгеній Олександрович

Керівник:
професор, д.ф-м.н., професор кафедри ММСА
Богданський Юрій Вікторович

Консультант з економічного розділу:
доцент, к.е.н., доцент кафедри ТТПЕ
Шевчук Олена Анатоліївна

Консультант з нормоконтролю:
доцент, к.т.н., доцент кафедри ММСА
Коваленко Анатолій Єпіфанович

Рецензент:
професор, д.ф.-м.н, в.о. кафедри ДР
Дудкін Микола Євгенійович

Засвідчую, що у цій дипломній роботі
немає запозичень з праць інших авторів
без відповідних посилань.
Студент: Шарапов Євгеній Олександрович

Київ – 2020 року

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Інститут прикладного системного аналізу

Кафедра математичних методів системного аналізу

Рівень вищої освіти – перший (бакалаврський)

Спеціальність – 124 "Системний аналіз"

Освітньо-професійна програма «Системний аналіз і управління»

ЗАТВЕРДЖУЮ.
В. о. завідувача кафедри
__________ О.Л. Тимощук

«___»_____________20__ р.

ЗАВДАННЯ
на дипломну роботу студенту

Шарапову Євгенію Олександровичу

1. Тема роботи «Порівняльний аналіз секвенціального та функціонального підходів до побудови узагальненої функції», керівник роботи Богданський Юрій Вікторович, доктор фізико-математичних наук, професор, затверджені наказом по університету від «25» травня 2020 р. №1143-с

2. Термін подання студентом роботи

3. Вихідні дані до роботи ____

____

4. Зміст роботи ____

____

____

5. Перелік ілюстративного матеріалу (із зазначенням плакатів, презентацій тощо) ____

____

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв
Економічний	Шевчук О.А. доцент		

7. Дата видачі завдання «15» квітня 2020 р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання дипломної роботи	Термін виконання етапів роботи	Примітка
1	Формулювання тематики (напряму) дослідження	03.09.2019—30.09.2019	
2	Аналіз актуальності задач стосовно тематики дослідження	01.10.2019—30.11.2019	
3	Аналіз відомих результатів стосовно тематики дослідження	01.11.2019—30.11.2019	
4	Формування задач дослідження	01.12.2019—30.12.2019	
5	Вибір теми дипломного досслідження	14.02.2020	
6	Збір даних дослідження. Попередній аналіз	01.03.2020—30.03.2020	
7	Дослідження джерел інформації	01.03.2020—30.04.2020	
8	Виконання обчислювальних експериментів	01.05.2020—31.05.2020	
9	Оформлення пояснювальної записки у цілому	21.05.2020—31.05.2020	
10	Підготовка презентації до захисту	28.05.2020—01.06.2020	
11	Попередній захист дипломної роботи	29.05.2020—03.06.2020	
12	Захист дипломної робот	15.06.2020—18.06.2020	

Студент Є. О. Шарапов

Керівник Ю. В. Богданський

РЕФЕРАТ

Дипломна робота: 91 с., 6 табл., 32 рис., 2 дод., 19 джерел.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИЙ ОПЕРАТОР, ЗГОРТКА, ІНТЕГРАЛ, СЕКВЕНЦІАЛЬНИЙ ПІДХІД, УЗАГАЛЬНЕНА ФУНКЦІЯ, ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ’ЯЗОК, ФУНДАМЕНТАЛЬНА ПОСЛІДОВНІСТЬ, ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ ПІДХІД, ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ.

Об’єкт дослідження — підходи до побудови поняття узагальненої функції.

Мета роботи — проведення порівняльного аналізу секвенціального та функціонального підходів до побудови узагальненої функції, побудова відповідності між ними, використання секвенціального підходу до пошуку узагальнених розв’язків диференціальних рівнянь.

Методи дослідження — побудова відповідних фундаментлльних послідовностей, чисельне моделювання, оброблення та аналіз отриманих результатів, а також дослідження відповідної літератури.

Детально висвітлено побудову узагальненої функції з використанням секвенціального підходу. Досліджено взаємозв’язок із функціональним підходом. Побудовано відповідність.

Запроваджено поняття узагальненого диференціального рівняння із використанням секвенціального підходу. Доведено коректність побудови. Побудовано алгоритм пошуку узагальнених розв’язків, користуючись секвенціальним підходом.

Здійснено чисельне моделювання пошуку фундаментального розв’язку лінійних диференціальних операторів.

В результаті роботи розроблено алгоритм розв’язку узагальнених лінійних диференціальних рівнянь із використанням альтернативного функціональному підходу секвенціального та описано його застосування до розв’язку чисельних задач.

Упровадження нової технології робить можливим чисельне моделювання узагальнених диференціальних рівнянь, а також розв’язок низки задач, таких як пошук наближень функції Гріна, фундаментальних розв’язків звичайних диференціальних рівнянь тощо.

ABSTRACT

Thesis work: 91 pp., 32 fig, 6 tabl., 2 app., 19 sources.

CONVOLUTION, DIFFERENTIAL OPERATOR, DISTRIBUTION, FUNCTIONAL APPROACH, FUNDAMENTAL SEQUENCE, FUNDAMENTAL SOLUTION, INTEGRAL, NUMERICAL METHODS, SEQUENTIAL APPROACH.

The object of the research is the way of building distributions.
The aim of the study is the conduction of the comparative analysis of sequential and functional approaches to building distributions, constructing a connection between them, application of sequential approach to solving differential equations.

The research is based on building corresponding fundamental sequences, numerical modelling, processing and analysis of the obtained results, as well as studying corresponding literature.

The construction of the distribution on the basis of the sequential approach is given. A connection between functions land sequential approaches is studied. A connection between two approaches is built.

A notion of differential equation on the basis of sequential approach is given. This construction is theoretically confirmed. An algorithm for searching generalised solutions on the basis of sequential approach is given.

A numerically modelling of the search of fundamental solutions of linear differential operators.

As a result, a new algorithm for solving generalised linear differential equations with the use of sequential approach rather than functional approach was created. Its effectiveness was demonstrated on multiple examples.

Implementation of a new technology enables numerical modelling of generalised differential equations, as well as solving some problems, among those numerical approximation of Green’s function, fundamental solutions of ordinary differential equations and others.

ЗМІСТ

с.

СКОРОЧЕННЯ ТА УМОВНІ ПОЗНАКИ

$H(t)$ — функція Гевісайда;

$\hat{H}(t)$ — Первісна функції Гевісайда $\hat{H}(t) = \begin{cases} t, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$;

$\hat{=}$ — перетворення Лапласа;

p — змінна образу Лапласа;

ω — змінна перетворення Фур'є;

$F[f]$ - перетворення Фур'є функції f;

∇ - оператор набла;

Δ - векторний оператор Лапласа;

$C(A)$ — простір неперервних на множині A функцій;

$C^p(A)$ — простір p разів неперервно диференційовних на A функцій;

$D(A)$ — простір основних функцій на множині A;

$L_2(A)$ — простір функцій із інтегровним на множині A квадратом;

$\delta(x)$ — δ-функція Дірака;

$< f, \varphi >$ — формальне позначення дії узагальненої функції f на пробну функцію φ;

$F_n(x) \rightrightarrows F(x), x \in [a, b]$ - означає, що функціональна послідовність $F_n(x)$ збігається майже рівномірно до функції $F(x)$ на відрізку $[a, b]$;

$F_n \rightrightarrows \leftleftarrows G_n, x \in [a, b]$- означає, що функціональні послідовності F_n, G_n мають однакову майже рівномірну границю на відрізку $[a, b]$;

ВСТУП

Сучасний апарат математичної фізики базується на використанні узагальнених функцій. Теоретична частина цього розділу функціонального аналізу вимагає коректного запровадження поняття узагальненої функції. Таких способів існує декілька. Одним із найбільш обґрунтованих та розвинених є функціональний підхід, заснований на попередньому запроваджені простору основних функцій та побудові дуального до нього простору, елементами якого є узагальнені функції. Інший, альтернативний, підхід полягає у використанні функціональних послідовностей та розширенні поняття звичайної функції на кшталт того, як дійсні числа є розширенням раціональних. Сьогодні вкрай важливо мати сучасний та простий механізм роботи із рівняннями математичної фізики та крайовими задачами, які часто виникають у різноманітних галузях знань — економіці, фізиці, соціалогії тощо. Це визначає актуальність теми дипломної роботи «Порівняльний аналіз секвенціального та функціонального підходів до побудови узагальнених функцій».

Мета роботи полягає у ретельній побудові узагальненої функції, користуючись секвенціальним підходом, та порівнянні отриманого математичного об'єкту із аналогічним, побудованим з використанням функціонального підходу. Робота також ставить за мету опис використання отриманного апарату для дослідження питань збіжності послідовності розв'язків звичайних лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь та систем.

Мета дослідження дипломної роботи полягає у визначенні можливих напрямків використання секвенціального підходу на противагу функціональному.

Об'єктом дослідження дипломної роботи є методи побудови поняття узагальненої функції.

Предметом дослідження дипломної роботи є секвенціальний та функціональний підходи побудови узагальненої функції.

Методи дослідження ґрунтуються на вичерпному використанні знань, отриманих під час вивчення дисциплін «Функціональний аналіз», «Рівняння математичної фізики» та «Диференціальні рівняння».

Основний зміст роботи:

Перший розділ включає в себе огляд існуючої теорії узагальнених функцій та використання їх апарату для розв'язку задач математичної фізики, перпективи теорії та підходи до побудови узагальненої функції.

Приклади використання. Також описується нове застосування узагальнених функцій до розв'язку диференціальних рівнянь.

Третій розділ включає в себе застосування узагальнених функцій для дослідження збіжності послідовностей розв'язків звичайних лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь та систем. Розглядаються рівняння типу Ейлера, а також застосування до пошуку фундаментальних розв'язків рівнянь математичної фізики.

Четвертий розділ висвітлює економічну частину дипломної роботи.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

1. Описати ретельну побудову узагальненої функції, користуючись секвенціальним підходом.
2. Провести порівняльний аналіз секвенціального та функціонального підходів до побудови узагальненої функції. Виокремити переваги та недоліки обох підходів. Вказати зв'язок між підходами.
3. Застосувати секвенціальний підход до дослідження питання збіжності послідовності розв'язків звичайних лінійних диференціальних рівнянь та систем.
4. Дослідити можливе застосування отриманих результатів до розв'язків задач математичної фізики.

1 ПОНЯТТЯ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ФУНКЦІЇ

1.1 Виникнення узагальненої функції

Передумови до виникнення узагальнених функцій з’явилися задовго до функціонального аналізу, в контексті якого вона сьогодні часто запроваджується. У 1807 році, Фур’є довів свою відому теорему:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(t)cos(\omega(x-t))dtd\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(t)dt\int_{\mathbb{R}} cos(\omega(x-t))d\omega \quad (1)$$

Тоді другий інтеграл в формулі (1) можна розглядати як $\delta(x-t)$. Ця функція також може бути отримана, якщо розглянути міру вигляду:

$$\delta(A) = 0, \text{якщо } 0 \notin A, \text{та } \delta(A) = 1 \text{ інакше}$$

Тоді справедливо наступне:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)d\delta(x) = f(0) \quad (2)$$

Міра, що відповідає формулі (2) може бути отримана як слабка границя послідовності мір. Наприклад, послідовність дельтоподібних гаусівських мір із дисперсією, що прямує до нуля.

Нарешті, власне δ-функція може вважатися описом одиничного імпульсу, та може бути отримана як границя послідовності нескінченнодиференційовних функцій певного вигляду.

Із наведеного вище зрозуміло, що поняття узагальненої функції виникає незалежно у багатьох галузях математики, таких як: теорія ймовірностей, математичний аналіз, теорія керування, гармочний аналіз та інші. З іншого боку, схильність до використання цього об’єкту простежується також у дисциплінах, що активно використовують апарат математики.

На початку 20 століття, французький фізик Поль Дірак почав активно використовувати введене ним поняття функції та її похідних в термінах квантової механіки. Цей апарат виявився надзвичайно зручним, незважаючи на те, що йому бракувало математичної обґрунтованості. Так, для міри, якою користувався Дірак, не існувало похідної Радона-Нікодима, проте вчений вживав наступну нотацію:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)d\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx$$

У 1950 роках почався активний розвиток теорії узагальнених функцій. Найбільшого успіху досягли радянський математик Соболєв С.Л. (1936 р.), учень Лузіна М.М. та французький математик Лоран Шварц (1950-1951 рр.), які побудували сумісну теорію на основі результатів, отриманих Стекловим В.А., С.Бохнером, П. Леві. В процесі такої побудови вводиться поняття основних функцій, що є нескінченно диференційовними із наступним запровадженням топології на цьому просторі. Тоді узагальненими функціями називають лінійні неперервні функціонали на побудованому просторі. Такий підхід називається функціональним.

За допомогою отриманого апарату будуються узагальнення перетворень Лапласу та Фур'є, узагальнюється розв'язок диференціальних рівнянь, розширюється існуюча теорія. В англомовній літературі узагальнені функції дістали назву «distributions», через походження від фізичної інтерпретації щільності точкового заряду.

Існує декілька способів побудови поняття узагальненої функції. Серед них найбільш відомими є функціональний, описаний вище, секвенціальний, підхід Бремермана, а також підхід Мікусінського. Вартий згадки також підхід Коломбо, що запроваджує узагальнені функції через алгебри спеціального вигляду.

Із перерахованих у попередньому параграфі можливих підходів, окремий інтерес представляє секвенціальний підхід, вагомий вклад в розвиток якого зробили польські математики. Підхід базується на використанні результатів Дірака, який представляв функцію як слабку границю регулярних мір. Саме це надихнуло авторів Мікусінського, Антосика та Сикорського на узагальнення ідей Дірака та представлення узагальнених функцій у вигляді класів евівалентності послідовностей певного вигляду.

Такий підхід виявляється набагато більш простим у побудові, аніж функціональний, що дозволяє активно використовувати його на практиці.

Таким чином, введенню концепції узагальненої функції передувала низка подій та відкриттів у суміжних дисциплінах, які остаточно втілилися у розвинену та красиву теорію. Сьогодні вона активно розвивається і використовує сучасні досягнення математики такі, як поняття дробової похідної, операторне числення, сучасні надбання функціонального аналізу тощо. Окремий інтерес представляє з себе область застосування цього апарату, що включає в себе низку розділів математики та фізику.

1.2 Використання узагальнених функцій

Математична фізика розвивалася паралельно розвитку математики та фізики із часів запровадження Лейбніцем та Ньютоном основних положень диференціального та інтегрального числення. Її задачею була коректна постановка та розв'язання фізичних задач за допомогою математично обґрунтованих підходів, створення математичних моделей. До історично перших задач цього напрямку математики можна віднести проблеми теоретичної механіки, а саме: теорії коливань, гідродинаміки, акустики та багатьох інших. Наступним етапом було застосування результатів математичної фізики до дослідження рівнянь теплопровідності, дифузії, пружності. Нарешті, в минулому столітті ця галузь математики активно використовувалася для опису об'єктів квантової механіки та теорії поля.

Вагомий внесок цієї теорії до розвитку математики та її застосувань складно переоцінити. Найбільш важливим є те, що розв'язуючи свої задачі, математична фізика створювала нову та розширювала стару теорію. Серед нових понять, запроваджених завдяки цій галузі математики, можна виокремити теорію потенціалу та інтегральних перетворень. В той самий час активний розвиток отримала теорія диференціальних рівнянь, операторів. Було створено передумови до введення поняття узагальнених функцій. Саме сучасна математична фізика є основною областю застосування теорії узагальнених функцій.

Класична постановка задач математичної фізики, а саме крайових, припускають те, що розв'язки належать до класу достатньо гладких функцій. Більш того, вважається, що розв'язок має задовольняти рівнянню на всій області значень. Сьогодні особливий інтерес представляють задачі, які містять недиференційовні або навіть розривні функції. Для таких задач класична теорія виявляється недієздатною. Саме в цьому контексті природньо виникає потреба в узагальнені поняття диференціювання. На цьому шляху Соболевем було узагальнено операції диференціювання та побудовано спецільні функціональні простори, які згодом отримали назву Соболівських. Відмова від класичної постановки задач математичної фізики дозволила суттєво модифікувати техніку розв'язку крайових задач.

Конструкція узагальненої функції, незалежно від підходу, що застосовується для запровадження цього поняття, робить кожну функцію нескінченно диференційовною. Вартим уваги є можливість почленного диференціювання рядів узагальнених функцій, не потребуючи від ряду нічого, окрім збіжності. Це в свою чергу дозволяє позбавитися від обмежень класичної теорії та шукати розв'язок задачі у класі узагальнених функцій.

Поняття узагальненого (або як деякі автори називають, слабкого розв'язку) можна продемонструвати на прикладі наступної крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь[1]:

$$\begin{cases} u''(x) = f(x), x \in [0,\ l] \\ u(0) = u(l) = 0 \end{cases}$$

$$L = \frac{d^2}{dx^2} \quad D_L = \{\psi \in C^2[0,\ l] : \psi(0) = \psi(l) = 0\}(D_L \subset L^2[0,\ l]) \tag{3}$$

В класичній постановці задачі (3), розв'язок шукається у класі двічі неперервно диференційовних функцій. Зазначимо, що область визначення оператора L є щільною. Якщо скалярно помножити обидві частини рівняння на функцію v із D_L і проінтегрувати два рази частинами, то отримаємо вираз:

$$\int_0^l uv''dx = \int_0^l fvdx \quad \forall v \in D_L \tag{4}$$

Отже, розв'язок даного рівняння можна шукати тепер не тільки на множині D_L, а і поза нею. В такій постановці довільне класичний розв'язок також задовільнятиме інтегральне рівняння (4), але не навпаки. Розв'язок рівняння (4) називають слабким або узагальненим.

В термінах функціонального підходу, рівняння (4) може бути переформульовано у наступному вигляді:

$$< u'', v > = < f, v > , \quad \forall v \in D([0,\ l]), \tag{5}$$

Запис (5), формально означає співпадіння двох узагальнених функцій f та u'':

$$u'' = f \tag{6}$$

Необхідність включення крайових умов у таку постановку задачі не має сенсу за двох причин:

1) Узагальнені функції не мають значень в конкретних точках;

2) Крайові умови включаються в обмеження $\forall v \in D([0,\ l])$. Вибираючи певні функції та у випадку регулярності правої частини рівнння, можна відновити крайові умови.

В такій постановці задачі, велика кількість обмежень на розв'язок виявляється захованими у формальний вираз (6), що дозволяє зручно працювати з крайовими задачами.

Важливим розширенням теорії узагальнених функцій є так звані функції повільного зростання. Необхідність введення такого класу виникає із потреб узагальнення перетворень Фур'є, умовою існування якого є абсолютна інтегровність оригіналу. За основні (або пробні функції) в такому випадку обирають функції, що разом із всіма своїми похідними прямують до 0 на нескінченності швидше за $\frac{1}{|x|^k} \forall k = 1,2\ldots$. Простір із такою структурою виявляється розширенням простору класичних фінітних функцій, що запроваджуються в контексті функціонального підходу. Більш того, вихідний простір є щільним у такому розширенні. Тоді узагальненою функцією повільного зростання називають довільний лінійний неперервний функціонал на побудованому просторі. Такий простір ,навпаки, вкладається у множину узагальнених функцій на просторі фінітних нескінченно диференційовних основних функцій. [1]

Як і у випадку звичайних узагальнених функцій, можна довести, що довільна узагальнена функція повільного зростання є похідною певного порядку неперервної абсолютно інтегровної функці (теорема Шварца).[1]

Оскільки простір основних функцій повільного росту належить до класу функцій, що мають перетворення Фур'є, то перетворення Фур'є узагальненої функції повільного росту можна ввести із таких міркувань[2]:

$$< F[f], \varphi > = < f, F[\varphi] > \tag{7}$$

Розширення класичного інтегрального перетворення Фур'є (7) зберігає основні властивості, що доводяться в курсі математичного аналізу. Отримані результати дозволяють також зручно працювати із еліптичними функціями, а також застосовувати метод Фур'є до пошуку узагальнених розв'язків задач математичної фізики.

В теорії керування важливу роль грає вагова функція, яка представляє з себе реакцію на одиничний імпульс або δ-функцію Дірака. Знання цієї функції дозволяє отримати вихідний сигнал, як згортку вагової функції та вхідного сигналу. Оскільки аналіз систем автоматичного керування та їх синтез вимагають коректно запроваджене перетворення Лапласа, то теорія узагальнених функцій розширює також це поняття.[2]

Дослідження грунтується на зв'язку між перетворенням Фур'є та перетворенням Лапласа, а саме [1, 2]:

$$f \mathrel{\hat{=}} F[f(t)e^{-\sigma t}](-\omega), \quad \sigma > a, \quad |f(t)| \leq Ae^{at} \tag{8}$$

Ще один спосіб введення полягає у формальному співставленні виразу:

$$\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = < f, e^{-pt} > \tag{9}$$

Тоді перетворенням Лапласа узагальненої функції буде перетвероння експоненти. Таким чином, всі основні властивості перетворення Лапласа зберігаються також для узагальнених функцій, як при способі введення (8) так і (9). В такому вигляді, образ Лапласа функції вже не обов'язково прямує до нуля на нескінченності.

Застосування цієї теорії дозволяє коректно працювати із сигналами типу одиничного імпульсу, застосовувати апарат інтегральних перетворень для розв'язку рівнянь математичної фізики.

Нарешті, теорія узагальнених функцій знайшла активне використання у фізиці. Наприклад, для формального запису щільності точкового заряду чи маси, сконцентрованої в точці, можна використати поняття узагальнених функцій. Формальному опису також піддається запис взаємодії двох тіл, коли вважається, що часом на передачу імпульсу можна знехтувати.

Застосування такого гнучкого апарату, як узагальнені функції сильно залежить від вибору основних функцій та запровадження на цьому просторі структури. Так, допускають узагальнення функції комплексної змінної, функції багатьох змінних, а також функції, визначені на поверхнях та кривих.

Таким чином, в цьому розділі було коротко показано, як та де застосовується поняття узагальненої функції. На основі наведених прикладів стає зрозумілим те, що дане поняття дійно розширює класичне означення звичайної функції. Так, формули (8) та (9) демонструють подібність у введенні інтегральних перетворень схожим чином до такого, як це виконують у класичному курсі аналізу. Означення (3) показує, як можна переформулювати крайову задачу до узагальненого диференціального рівняння.

Отже, виходячи із чисельних прикладів застосування до розв'язку задач математичної фізики, застосувань у теорії керування та фізиці, можна зробити висновок про важливість побудованої теорії та перспективність розвитку в цьому напрямі.

1.3 Підходи до запровадження поняття узагальненої функції

Як вже згадувалося вище, існує численна кількість підходів, за допомогою яких можна коректно запровадити поняття узагальненої функції. В цьому розділі дамо коротку характеристику найбільш відомим методам.

1) Функціональний підхід [3]:

Запроваджений Соболєвим С.Л. та розвинутий Л. Шварцем, метод отримав найбільше визнання через вичерпність, універсальність та змістовність. Спершу запроваджується простір основних (або пробних) функцій на певній множині. До цих функцій висуваються вимоги нескінченної диференційовності та фінітності. Такий простір виявляється лінійним. Наступним кроком є запровадження топології на цьому просторі. Під збіжністю послідовності основних функцій розуміють рівномірну збіжність всіх похідних та наявність відрізку, що носій кожного члена послідовності вкладається у нього. Під узагальненими функціями розуміють тоді множину лінійних неперервних функціоналів на цьому простору. Варто зазначити, що кожна локально інтегровна функція породжує лінійний функціонал на просторі основних функцій за наступним сценарієм [1, 3]:

$$< f, \varphi > = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx \qquad (10)$$

При цьому, якщо функції f_1 та f_2 відрізняються лише на множині міри нуль, то функціонали, що ними породжуються, співпадають. Таким чином, множина локально інтегровних функцій вкладається у простір узагальнених. Узагальнені функції, що носять вигляд (10) називаються регулярними. Окрім регулярних узагальнених функцій існують також сингулярні, що не дозволяють представлення у вигляді (10), прикладом таких функцій можуть слугувати δ -функція та функція:

$$\frac{1}{x} :< \frac{1}{x}, \varphi > = V.P.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx = V.P.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}dx \qquad (11)$$

Для того, щоб продемонструвати, що клас сингулярних узагальнених функцій є також чисельним, а не просто винятком із правила, варто не забувати, що довільна похідна δ-функції та функції (11) разом із своїми лінійними комбінаціями є також сингулярними. Більш того, довільну функцію, що не є локально інтегровною та має скінченну кількість розривів другого роду, породжує сингулярну узагальнену функцію на кшталт того, як це робить функція $\frac{1}{x}$.

2) Секвенціальний підхід [4]:

Запроваджений та розроблений польськими математиками Я. Мікусінським, П. Антосиком та Р. Сікорським. Розроблений на основі можливої апроксимації узагальнених функцій за допомогою функціональних послідовностей. Аналогічно тому, як запроваджується простір $L_2([a,b])$, елементами якого є не функції, а їх класи еквівалентності, вводиться відношення еквівалентності функціональних послідовностей наступного вигляду:

$$\{f_n\} \sim \{g_n\} \leftrightarrow \exists F_n, G_n, k \geq 0 : F_n \rightrightarrows \leftleftarrows G_n, x \in [a,b], F_n^{(k)} = f_n, G_n^{(k)} = g_n \quad (12)$$

В постановці задачі (12) кожен клас еквівалентності визначає свою узагальнену функцію. Як і у випадку функціонального підходу, локально інтегровні функції також визначають узагальнені функції за наступним сценарієм:

$$f_n = f \ \forall n \geq 1$$

В такій постановці, число $k \geq 1$, а послідовність:

$$F_n = \int_{x_0}^{x} f_n(t)dt$$

буде визначати клас еквівалентності функції f. Можна довести, що різні локально інтегровні функції визначають різні класи еквівалентності.

Таким чином відбувається ототожнення функціональних послідовностей. Так, в контексті такого визначення, узагальнена функція δ-функція може бути визначена як клас еквівалентності, що задається послідовність [3]:

$$f_n = \begin{cases} e^{\frac{x}{x^2 - \varepsilon_n^2}}, |x| \leq \varepsilon_n \\ 0, |x| > \varepsilon_n \end{cases} \qquad \varepsilon_n \to 0 + 0 \qquad (13)$$

За допомогою секвенціального підходу природньо вводиться поняття збіжності, похідної та інтегралу. Властивості узагальнених функцій в такому сенсі співпадають із властивостями тих, що будується із використанням функціонального підходу. Більш детально секвенціальний підхід буде досліджено у наступних розділах при порівнянні із функціональним підходом.

3) Підхід Мікусінського [4]:

Підхід польського математика Мікусінського (1948 р.) базується на запровадженні комутативного кільця функцій на додатній півосі. При цьому операція додавання відповідає звичайному додаванню, а операція добутку відповідає згортці. Доводиться, що таке кільце не має дільників нуля, а тому може бути розширене до поля шляхом додавання нейтрального елементу за добутком та обернених елементів до всіх функцій, окрім тотожньо нульової. Елементами цього поля в такій постановці будуть узагальнені функції. В такій постановці задачі, нейтральним елементом за множенням виявляється не що інше, як δ-функція Дірака.

Підхід Мікусінського має низку недоліків, одним із найголовніших з яких є проблема півпростору, важливість якої зростає із розширенням узагальнених функцій до функцій багатьох змінних.

4) Підхід Хосе-Себаштьяну-Сільва [5]:

На основі досягнень С.Л. Соболєва та Л. Шварца, у 1950-х роках португальський математик, Хосе-Себаштьяну-Сільва запровадив набір однойменних аксіом, що визначали узагальнену функцію (розподіл), як формальну похідну певного порядку неперервної функції. Будується на основі того факту, що довільна узагальнена функція, при запровадженні на основі функціонального підходу може бути представлена похідною певного порядку неперервної функції. Вводиться відображення наступного вигляду [5]:

$$i : C(\mathbb{R}) \to E, \quad D : E \to E$$

Де $C(\mathbb{R})$ — простір неперервних функцій на дійсній осі;

E — простір узагальнених функцій;

D — оператор диференціювання;

Аксіома 1: Відображення i — ін'єктивне.

Аксіома 2: Кожній узагальненій функції μ, відповідає узагальнена функція $D\mu$ і справедливо, що якщо $\mu = i(f)$, де $f \in C^1(\mathbb{R})$, то $D\mu = i(f')$

Аксіома 3: Якщо μ — узагальнена функція на $\mathbb{R}$, тоді існує така функція $f \in C(\mathbb{R})$ та натуральне число r, що $\mu = D^r i(f)$

Аксіома 4: Для двох довільних функцій $g, f \in C(\mathbb{R})$ та натурального числа r, $D^r i(f) = D^i i(g) \leftrightarrow f - g$ — поліном степеня $< r$

Таким чином забезпечується вкладення неперервних функцій у простір узагальнених. Цей метод не є дуже популярним, проте він представляє інтерес, як простий підхід, що не вимагає апарату функціонального аналізу.

4) Підхід Бремермана [6]:

Автор цього підходу, німецький математик Рой Бремерман надзвичайно цікавився використанням узагальнених функцій в контексті квантової механіки.

Математика цікавив зв'язок між аналітичним представленням розподілів та розбиттям області інтегровності перетворення Фурье. Свою теорію Бремерман будує, використовуючи результати Шварца, а також викладає свою теорію дуже змістовно, використовуючи лише апарат комплекскного та дійсного аналізів. В такій побудові, узагальнені функції розглядаються як граничні значення аналітичних функцій на дійсній осі.

5) Підхід Коломбо—Егорова [7]-[9]:

Однією із великих проблем теорії узагальнених функцій є коректне запровадження операції добутку. З цією проблемою стикаються усі без виключення розглянуті вище способи запровадження поняття узагальненої функції. Так, Л. Шварцем було доведено неможливість запровадження коректно визначеної операції добутку, що розширювала б класичний добуток функцій. Незважаючи на цей результат, математиками було виділено класи пар (f, g) узагальнених функцій, для яких допускається розширення операції множення. Одним із способів уникнути цю проблему, виявляється запровадження зовсім інших об'єктів, які зберігають основні властивості узагальнених функцій та містять останні. Така побудова здійснюється шляхом побудови фактор-алгебри по алгебрі, що будується на основі вихідної алгебри на просторі узагальнених функцій.Історично найпершим до цього питання підійшли математики Ж.Ф. Коломбо та Ю.В. Егоров. Їм вдалося побудувати вдале розширення теорії узагальнених функцій.

Таким чином існує низка методів, спрямованих на коректне введення узагальнених функцій. Всі запропоновані підходи мають певні розбіжності, що здебільшого полягають в аксіоматиці. Загалом простежується тенденція проводити побудову узагальнених функцій, користуючись принципом узагальнення. Під цим мається на увазі побудову певного відношення еквівалентності із подальшим виділенням класів еквівалентності та ототожнення функцій в цих класах. Ці класи і називають узагальненими функціями. Така ідея лежить в основі підходів, наприклад, секвенціального та підходу Коломбо-Егорова. Інша тенденція має вигляд забезпечення зв'язку із певного роду відображенням. Так, таку ідею використовують функціональний підхід, підхід Хосе-Кріштіану-Сільва. Отже, є сенс розглядати дві ці ідеї, як альтернативні і проводити порівняльний аналіз найбільщ відомих представників — секвенціального та функціонального підходів.

1.4 Сучасні проблеми математичної фізики. Перспективні напрямки теорії узагальнених функцій

Як вже згадувалося вище, основною областю використання узагальнених функцій є математична фізика. Саме тому ця теорія активно застосовується для розв'язку сучасних проблем рівнянь математичної фізики.

В кінці 19-го століття, початку 20-го століття окремий інтерес для дослідників стали представляти лінійні рівняння зі змінними коефіцієнтами. Окремі результати були отримані С. Ковалевською. Звичайно, за деяких умов можна виконати заміну незалеженої змінної. Для зведення рівняння до рівняння з постійними коефіцієнтами ще одним варіантом може бути поділ змінних. Проте, в загальному випадку ця проблема не має розв'язку.

Досить часто математичні моделі конкретних фізичних явищ приводять до нелінійних рівнянь. Таким чином, виникає задача створення адекватної математичної теорії. В більшості випадків окреме рівняння потребує індивідуальний підхід до розв'язку. В процесі вирішення цих проблем виникали окремі математичні течії, що ставили за мету пошук розв'язку окремих рівнянь. Природньо тому виникає потреба у пошуку принаймні певного класу нелінійних рівнянь, що допускає наявність аналітичного розв'язку. У такий клас можна віднести, наприклад, квазілінійні рівняння:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i(x,u)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = b(x,u) \tag{14}$$

Ліворуч у формулах (14) для порівняння зображено лінійне однорідне рівняння першого порядку, праворуч — квазілінійне . Моделі, побудовані на основі квазілінійних рівнянь, виявляються більш адекватними процесам природи, що вони описують.

Одним із дуже важливих нововведень, що дозволили суттєво розширити використання математичної фізики стало застосування поняття дробової похідної, що було вперше згадано у 1695 році. Це дозволило, в свою чергу, розширити методи формалізації рівнянь. Наприклад, в теорії керування стало можливим проектування регуляторів із дробовими похідними, що збільшує їх потенціал, а також описувати складні моделі дифузії. В теорії узагальнених функцій теорія дробових похідних також отримала використання. Так, було знайдено коректне означення дробових узагальнених похідних. Важливим досягненням теорії стало узагальнення Тейлорівського розкладу, а також запровадження дробового Тейлорівського розкладу. [10]

Опишемо декілька актуальних та сучасних нелінійних моделей, до яких застосовувалися методи теорії узагальнених функцій.

Оскільки метою математичної фізики є формалізація та розв'язок проблем сучасної фізики, то із розвитком останньої змінюються методи та підходи першої. Так, низка задач була поставлена такими новітніми галузями фізики, як квантова механіка, теорія відносності, газова динаміка, фізика плазми, теорія ядерних реакторів. Пошук узагальнених розв'язків таких задач є хіба що не найбільш важливим пріоритетом сучасної теорії математичної фізики. Так, окремим питанням постає перевірка адекватності рівняння Навье-Стокса:

$$\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = -\left(\overrightarrow{v}, \nabla\right)\overrightarrow{v} + \nu\Delta\overrightarrow{v} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{f} \qquad \begin{cases} \overrightarrow{v} = 0, & \overrightarrow{x} \in \Omega \\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_0, & t = 0 \end{cases} \tag{15}$$

Де ν — коефіцієнт в'язкості, Па·с;

ρ — густина, кг/м^3;

p — тиск Па;

$\overrightarrow{v}$ — вектор-швидкість м/с.

Рівняння (15) описує рух в'язкої рідини. Проблема формулюється так: чи існує для кожних початкових гладких умов розв'язок цього рівняння. Рівняння сильно залежить від початкових умов, а також породжує велику кількість різноманітних точних розв'язків, серед яких: стаціонарні течії, солітони на нелінійні хвилі, звукові коливання та інші.

В 2017 році розпочалися дослідження у Прінстонському університеті. Їх результати показують, що при негладких початкових умовах, існує декілька узагальнених розв'язків рівняння (15). Таким чином, порушується умова адекватності моделі описуваному процесу — єдиність розв'язку. Не зважаючи на те, що проблема вимагає дослідження для гладких функцій, знайдені неточності в просторі узагальнених розв'язків, дозволяють зробити перші кроки до вирішення цієї проблеми. [11]

До сучасних задач теорії математичної фізики також відносять проблеми калібрувальної теорії, об'єктом дослідження якої є калібрувальні поля та перетворення. Це поняття природньо пов'язано із групами симетрій, що описують дії, які не змінюють властивості хвильової функції. Так, найбільш простою є група перетворень, що зв'явилася разом із відкриттям електрону і отримала назву калібрувальної. Для електрона вона проста — це просто група поворотів простору. Для більш складних взаємодій, аніж електромагнітне, наприклад, сильного чи слабкого — вона значно складніше. Для сильної взаємодії вона відповідає трьохвимірній сфері у чотирьохвимірному просторі.

Відома теорія Янга—Міллса описує калібрувальну неабелеву групу. Рівняння, які описують цю групу, виявилися надзвичайно корисними у 70-80 роках двадцятого століття, коли постало питання про зв'язок між фундаментальними взаємодіями. Ці рівняння є нелінійними та більшість підходів до їх розв'язку виявилися недієздатними. У 1995 році було доведено існування розв'язку у просторах Соболєва із дробовим порядком. Також було отримано низку важливих результатів. [12]

Незважаючи на перспективність теорії та чисельні досягнення в області застосування та перенесення звичайних властивостей функцій на узагальнені функції, математики стикнулися із низкою проблем, які залишаються відкритими.

Досить важливою є проблема добутку узагальнених функцій. У минулому розділі описувався підхід Коломбо—Егорова [7]-[9], проте, це лише один із можливих варіантів розв'язку проблеми. Окремий інтерес представляє з себе квадрат δ-функції. Відомі математики-першопроходці в області узагальнених функцій, такі як Бремерман, Лі, Фішер, використовували різні підходи до формалізації степеня δ-функції. Найцікавіші з них датуються 2001-2008 роками, коли було доведено, що $\delta^{-k} = 0$ в певному сенсі. В 2014 китайськими математиками було запропоновано спосіб узагальнення степеня δ-функції за допомогою розкладу Тейлора із використанням дробових похідних в сенсі Капуто. [13]-[14]

Важливою проблемою є також пошук спільних властивостей, подібностей та розбіжностей підходів до побудови узагальненої фунції. Нажаль, кожен із описаних у попередньому розділі, містить певні упущення, що роблять складним розвиток теорії в одних місцях та полегшують його у інших. Однією із задач даної дипломної роботи є виокремлення недоліків, переваг та зв'язку між описаними вище підходами.

На сьогоднішній день теорія узагальнених функцій має низку цікавих відгалуджень, що розширюють теорію чи будують її з іншого ракурсу. У 1980-1985 роках активний розвиток отримало відгалудження від класичної теорії узагальнених функцій або розподілів — нелінійні узагальнені функції. Розвинення цієї теорії ставить за мету розв'язок вже багаторазово згаданої проблеми добутку узагальнених функцій. Ця теорія була започаткована Ж.Ф. Коломбо та отримала визнання за практичність до усунення існуючих обмежень первинної теорії. [15]

Альтернативні підходи, відмінні від запропонованих класичним аналізом також застосовувалися до дослідження узагальнених функцій. Так, в 1961 році було остаточно формалізовано некласичні методи нескінченно малої і створено підґрунтя для нестандартного аналізу. Напрямок запровадження і роботи із узагальненими функціями завдяки методам нестандратного аналізу лише набуває актуальності сьогодні.

В середині 20-го століття мав місце бурхливий розвиток теорії ультрарозподілів. В класичному функціональному підході до запровадження поняття узагальненої функції, в якості пробних функцій обирається простір D нескінченно диференційовних фінітних функцій із компактним носієм. Більш загальний підхід полягає у виборі лінійного простору D_o із топологією спеціального типу (локально опуклою), що неперервно вкладається у простір D. Спряжений простір D_o^* до D_o буде ширшим в тому сенсі, що обмеження кожного лінійного функціоналу визначеного на D на простір D_o буде елементом D_o^*. [15]

Провідну роль в дослідженнях та розвитку теорії суперрозподілів відіграли роботи математиків Ш. Румье, Х. Котмасу, А. Берлінг, Г. Бьорк, датовані початком 60-х років 20-го століття. Засоби теорії встановлювали зв'язок із класичними розподілами, запроваджували поняття інтегральних перетворень ультрарозподілів та низку інших результатів. Побудована теорія дозволила остаточно розв'язати декілька відомих задач математичної фізики та створити передумови до виникнення та розвитку теорії Коломбо—Егорова, що спирається на певні результати теорії ультрарозподілів. [15]

Розглянуті вище перспективи та іновації, що мали місце у теорії узагальнених функцій та суміжних галузях математики, демонструють зацікавленість світової математичної спільноти до цього апарату та його актуальність, як інструменту до вирішення сучасних проблем математичної фізики.

Висновки

У розділі 1 було описано передумови до виникнення апарату узагальнених функцій на основі інтуїтивних представлень дослідників та досліджень математиків С.Л. Соболєва та Л. Шварца. Протягом 20-го століття було представлено численну кількість способів запровадити апарат узагальненої функції. Математики в різних кутах світу незалежно один від одного пропонували власні підходи, розширення теорії. Так, у розділі 1 виконується загальний огляд існуючих підходів та застосування теорії узагальнених функцій. В результаті такої активної взаємодії та спільних зусиль було створено красиву математичну теорію, що знайшла застосування до розв'язку великої кількості задач математичної фізики, теоретичної фізики та теорії диференціальних рівнянь.

Створений інструмент виявився спроможним і до розв'язку сучасних проблем, чим пояснюється його актуальність та перспективність дослідження, що проводиться у даній дипломній роботі. Зокрема, окремий інтерес представляють підходи до запровадження узагальнених функцій. Деякі з них подібні та відрізняються несуттєво, інші, на противагу, мають кардинально різні ідеї, взяті за основу. В даній роботі передусім буде виконано огляд функціонального та секвенціального підходів, що є одним із найперших, які були розроблені.

Виокремлення різниць у застосуванні та побудові теорії, а також пошук взаємозв'язків між двома підходами є важливою задачею. Так, у останньому параграфі розділу 1 згадувалися перспективні напрямки та застосування теорії узагальнених функцій. Зокрема, більшість із застосувань базується на використанні функціонального підходу. Використання секвенціального ж є теоретично більш простим і цікавим для виконання практичних досліджень — його застосування буде представляти інтерес для даної дипломної роботи.

У наступному розділі буде виконано ретельну побудову узагальненої функції з використанням секвенціального підходу. Буде запроваджено основні операції та описано унаслідувані класичні властивості функцій. Нарешті буде проведено порівняння двох зазначених вище підходів. Це відіграє важливу роль для теорії. В процесі побудови будуть описані нові підходи до пошуку розв'язків диференціальних рівнянь в узагальнених функціях.

2 СЕКВЕНЦІАЛЬНИЙ ПІДХІД ДО ПОБУДОВИ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ

2.1 Фундаментальні послідовності. Секвенціальне визначення узагальненої функції

Основна мета запровадження узагальненої функції полягає в тому, що кожна узагальнена функція повинна мати похідну. Вводиться поняття фундаментальної послідовності функцій. Послідовність $\{f_n(x)\}$ — фундаментальна, якщо [16]:

$$\exists \{F_n\}, F(x) \in C((A,B)), k \in \mathbb{N} \cup \{0\} :$$

$$F_n^{(k)}(x) = f_n(x), F_n(x) \rightrightarrows F(x), x \in (a,b) \qquad (1)$$

В постановці (1) кожна послідовність неперервних фунцій є фундаментальною (із $k = 0$). Похідна послідовності фундаментальних функцій $\{f_n^{(m)}(x)\}$ фундаментальна (із $k = k_0 + m$, k_0 — константа k для $\{f_n(x)\}$). Наведемо приклади фундаментальних послідовностей (Рис. 2.1):

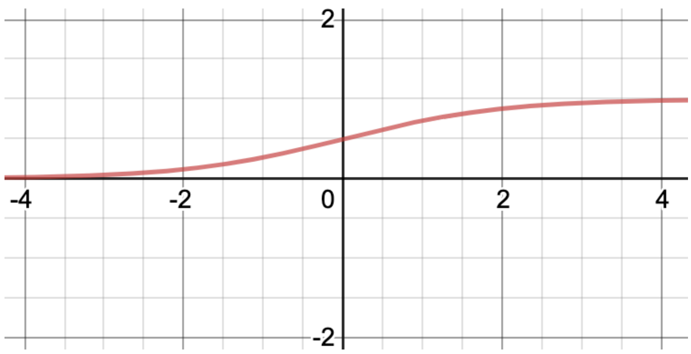


Рисунок 2.1 — графік $f_{10}(x)$

$$1)\ f_n(x) = \frac{1}{1 + e^{-nx}} \qquad (2)$$

Послідовність не збігається майже рівномірно (оскільки на довільному відрізку, що містить нуль, вона збігається, але не рівномірно), проте її первісна збігається рівномірно до функції $\hat{H}(x)$, тому $k = 1$ (Рис. 2.2):

$$F_n(x) = \int_0^x f_n(x)dt = \frac{ln(1 + e^{nx})}{n}$$

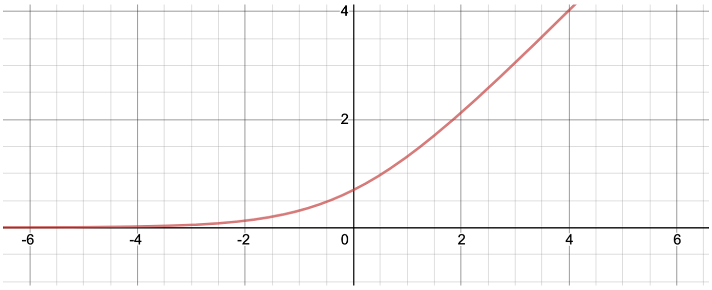


Рисунок 2.2 — графік первісної
$f_{10}(x)$

Розглянемо іншу послідовність, що задає дельта-функцію (Рис. 2.3 — 2.4):

$$2)\ g_n(x) = \begin{cases} n - n^2|x|, & |x| \le \frac{1}{n} \\ 0, & |x| > \frac{1}{n} \end{cases} \tag{4}$$

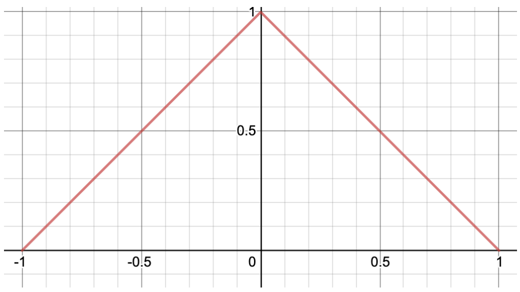


Рисунок 2.3 — графік $g_1(x)$

$$\hat{G}_n(t) = \int_{-\infty}^{x} g_n(t)dt = \begin{cases} 0, & x \le \frac{-1}{n} \\ \frac{n^2x^2}{2} + nx + \frac{1}{2}, & \frac{-1}{n} < x \le 0 \\ -\frac{n^2x^2}{2} + nx + \frac{1}{2}, & 0 < x \le \frac{1}{n} \\ 1, & x > \frac{1}{n} \end{cases}$$

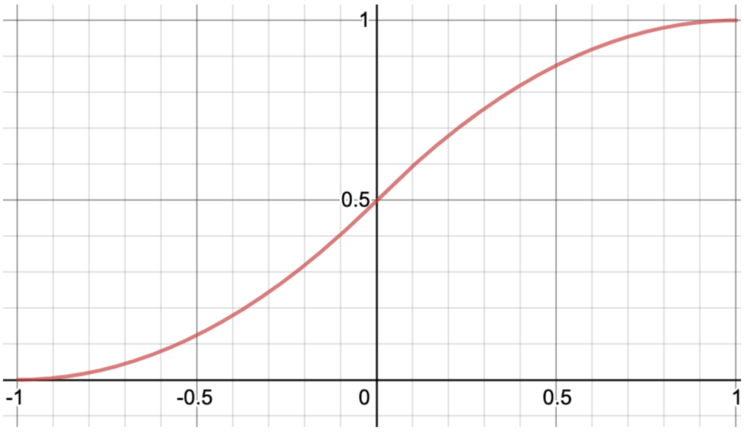


Рисунок 2.4— графік $G_1(x)$

Після інтегрування отримуємо послідовність, що не може збігатися майже рівномірно. Якщо взяти інтеграл другий раз, то отримаємо (Рис. 2.5):

$$\int_{-\infty}^{x} \hat{G}_n(t)dt = \begin{cases} 0, \quad x \leq \frac{-1}{n} \\ \frac{n^2x^3}{6} + \frac{nx^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{6n}, \frac{-1}{n} < x \leq 0 \\ -\frac{n^2x^3}{6} + \frac{nx^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{6n}, 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ x, \quad x > \frac{1}{n} \end{cases}$$

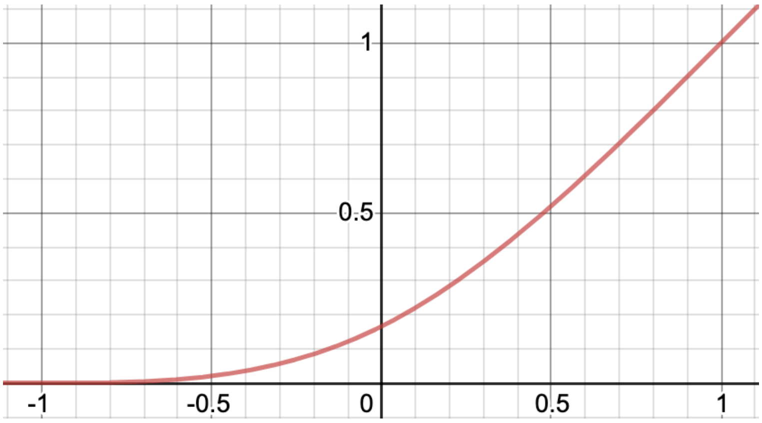


Рисунок 2.5— графік первісної $\hat{G}_1(x)$

Послідовність других первісних вже збігається навіть рівномірно до функції $\hat{H}(x)$, тому $k = 2$:

$$G_n(x) = \int_{-\infty}^{x} dt \int_{-\infty}^{t} f_n(\tau)d\tau$$

Наведемо приклад похідної із послідовності (2) та вихідної послідовності, заданою формулою (3) (Рис. 2.6):

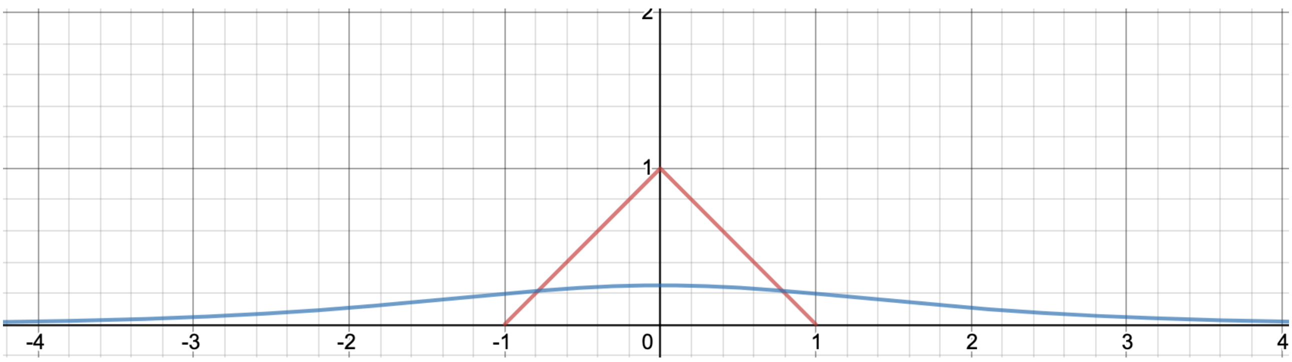


Рисунок 2.6— графік $f_1'(x)$ — блакитне, $g_1(x)$ — червоне

Тоді спільним числом k для обох послідовностей буде 2, та $F_n \rightrightarrows \leftleftarrows G_n, x \in \mathbb{R}$

Це наводить на думку, що послідовності неперервних функцій можна ототожнити за правилом [16]:

$$\{f_n(x)\} \sim \{g_n(x)\} \leftrightarrow \exists \{F_n(x)\}, \{G_n(x)\}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\} :$$

$$F_n^{(k)}(x) = f_n(x), G_n^{(k)}(x) = g_n(x), F_n \rightrightarrows \leftleftarrows G_n, x \in (a, b) \quad (4)$$

Важливим є те, що число k у формулі (4) за потреби можна замінити більшим натуральним числом простим переходом до розгляду первісних. Побудоване таким чином відношення є відношенням еквівалентності. Класи еквівалентності, що породжуються цим відношенням еквівалентності і є узагальненими функціями в сенсі секквенціального підходу. Так, $\{f_n'(x)\}$, що задана формулою (2), та $\{g_n(x)\}$, що задана формулою (3), задають одну узагальнену функцію — δ -функцію Дірака.

Зазначимо, що довільна узагальнена функція може бути записана як клас еквівалентності послідовності многочленів (наслідок із теореми Вейерштраса). Такий хід суттєво полегшує теоретичні дослідження. Приклад такої послідовності наведено на Рис. 2.7:

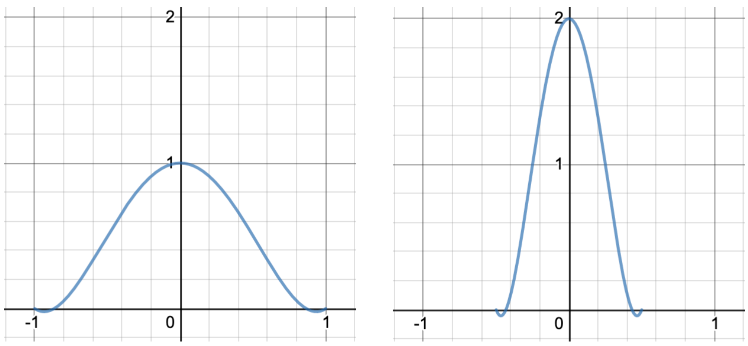


Рисунок 2.7 — перший (ліворуч) та другий (праворуч) члени послідовності многочленів, що задають δ-функцію

Постає цілком логічне питання — чому запроваджене таким чином поняття узагальненої функції розширює класичне поняття функції? Справа в тому, що довільна неперервна функція задає $f(x)$ стаціонарну послідовність $\{f(x)\}$, яка в свою чергу задає узагальнену функцію. При цьому, різні неперервні функції задають різні класи еквівалентності. Таким чином побудовано вкладення неперервних функцій в узагальнені. Не всі узагальнені функції задаються неперервними (наприклад, δ-функція Дірака). [1, 3, 16]

Вкладення неперервних функцій можна розширити до вкладення локально інтегровних в тому сенсі, що інтеграли двох функцій співпадають тоді і тільки тоді, коли функції рівні майже всюди. Отже, локально інтегровні функції задаються класами еквівалентності стаціонарних послідовностей своїх первісних. [16]

2.2 Операції над узагальненими функціями. Диференціювання, інтегрування. Границя послідовностей узагальнених функцій

Результат операції додавання узагальнених функцій та добутку на константу можна природньо запровадити як клас еквівалентності суми послідовностей [16]:

$$\lambda[f_n(x)] + \mu[g_n(x)] = [(\lambda f + \mu g)_n(x)] \tag{5}$$

Представлення (5) коректне (сума фундаментальних послідовностей є фундаментальною, а узагальнена функція, що їй відповідає не залежить від вибору послідовностей, що представляють доданки). Така операція зберігає основні властивості операції додавання для звичайних функцій: комутативність, асоціативність, нейтральний елемент 0. Множення на константу зберігає: дистрибутивність, асоціативність, нейтральний елемент 1. Добуток на нуль, фактично, визначає нульову узагальнену функцію. За допомогою суми та добутку на константу можна ввести різницю двох узагальнених функцій. [4, 16]

У минулому параграфі зазначалося, що довільну узагальнену функцію можна представити класом еквівалентності послідовності поліномів. Таке представлення дає змогу коректно визначити операцію диференціювання. Визначаємо похідну узагальненої функції наступним чином [16]:

$$[f_n(x)]^{(k)} = [p_n^{(k)}(x)], \quad [p_n(x)] = [f_n(x)] \tag{6}$$

Отримане таким чином визначення похідної фактично за формулою (6) стверджує, що кожна узагальнена функція є нескінченно диференційовною. При цьому, якщо узагальнена функція має звичайну похідну порядка m, то вона співпадає з її узагальненою похідною. Такий підхід дозволяє відразу отримати основні властивості диференціювання: правило диференціювання суми, правило диференціювання добутку на константу та правило повторного диференціювання. Наприклад, для узагальненних функцій, визначених на інтервалі (-1, 1) , що задаються формулою (2) бачимо, що похідна $f_n(x)$ збігається рівномірно до δ-функції, в той час, як сама послідовність збігається до функції Гевісайда (з тих самих міркувань, оскільки її первісна прямує до $\hat{H}(x)$).

В даному прикладі, шукана послідовність поліномів вибирається з міркувань інтерполяції (а саме поліноми Чебишова, збіжність є майже рівномірною на інтервалі (-1, 1), оскільки на довільній множині, що містить -1, чи 1 збіжність є нерівномірною). Таким чином, в узагальненому сенсі, функція Гевісайда має похідну саме δ-функцію.(Рис. 2.8)

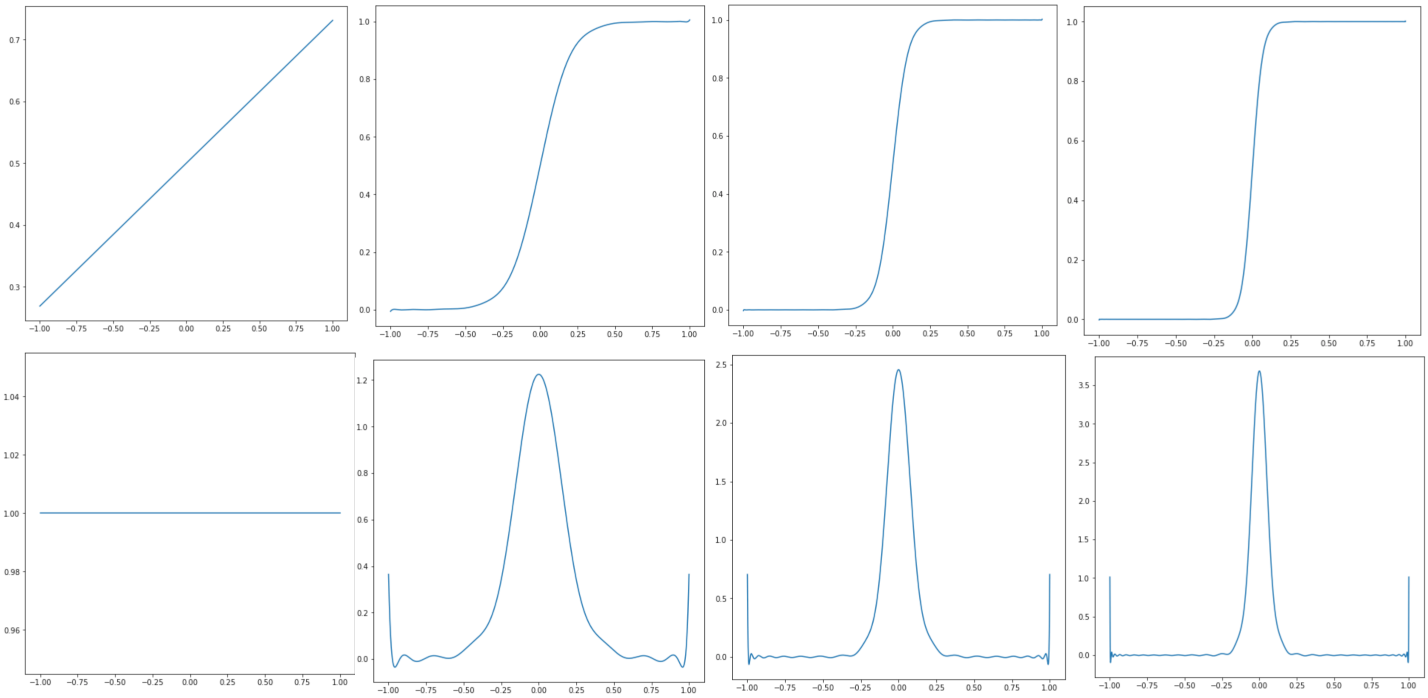


Рисунок 2.8 (згори, зліва направо):
$p_1(x), p_{20}(x), p_{40}(x), p_{60}(x)$
(знизу, зліва направо):
$p'_1(x), p'_{20}(x), p'_{40}(x), p'_{60}(x)$

Справедливим також є наступне твердження: якщо певна похідна узагальненої функції є звичайною функцією, то і вихідна функція є звичайною.

Первісну від узагальненої функції $f(x)$ можна ввести, користуючись вже введеним поняттям похідної, як довільну узагальнену функцію $F(x)$, що $F'(x) = f(x)$.

Для того, щоб запровадити поняття збіжності послідовностей узагальнених функцій, скористаємося наступним підходом. Кажемо, що $f_n \to f$, при $n \to \infty$, якщо [16]:

$$\exists \{F_n\}, F(x) \in C((A, B)), k \in \mathbb{N} \cup \{0\} :$$

$$F_n^{(k)}(x) = f_n(x), F^{(k)}(x) = f(x), F_n(x) \rightrightarrows F(x), x \in (a, b) \qquad (7)$$

Визначення границі (5) гарантує її єдиність і стандартні властивості границь: границя суми, добутку на константу. Також із такої збіжності випливає збіжність всіх похідних узагальненої функції. Важливий зв'язок між означенням узагальненої функції та запровадженою збіжністю встановлює той факт, що $[f_n(x)] = [f(x)]$, якщо $f_n(x), f(x)$ — неперервні $f_n \to f$, при $n \to \infty$ в узагальненому сенсі. [16]

Прикладом збіжності можуть стати узагальнені функції, що відповідають окремим членам послідовності, заданим за формулою (2). Вони збігаються в узагальненому сенсі до функції Гевісайда.

За допомогою збіжності послідовностей можна розповсюдити поняття збіжності на випадок неперервності параметра — $f_\alpha \to f,\ \alpha \to \alpha_0$:

$$\exists \{F_\alpha\}, F(x) \in C((A,B)), k \in \mathbb{N} \cup \{0\} :$$

$$F_\alpha^{(k)}(x) = f_\alpha(x), F^{(k)}(x) = f(x), F_\alpha(x) \rightrightarrows F(x), x \in (a,b) \tag{8}$$

Операцію граничного переходу за неперервним параметром, визначену за формулою (6) можна альтернативно визначати, як границю для довільної послідовності $\alpha_n \to \alpha$. Виходячи з побудови, воно буде коректним та не залежити від вибраної послідовності, якщо границя існує.

Варто зазначити, що поняття збіжності прив'язувалося до інтервалу, на якому розглядалася узагальнена функція. Насправді, можна вимагати лише того, щоб узагальнена функція, до якої прямує послідовність була визначена на інтервалі, що вкладено в перетин інтервалів, на яких визначено члени послідовності [16]:

$$f_\alpha(x) : x \in (a_\alpha, b_\alpha), f(x) : x \in (a,b), f_\alpha(x) \to f(x) :$$

$$\exists \{F_\alpha\}, F(x) \in C((A,B)), k \in \mathbb{N} \cup \{0\} :$$

$$F_\alpha^{(k)}(x) = f_\alpha(x), F^{(k)}(x) = f(x), F_\alpha(x) \rightrightarrows F(x), x \in \forall(\hat{a}, \hat{b}) \subset (a,b) \subset \bigcap_\alpha (a_\alpha, b_\alpha) \tag{9}$$

У випадку, якщо такий перетин є пустий — послідовність не збігається.

Користуючись отриманим поняттям збіжності за формулою (6) та його узагальненням за формулою (9) , можна запровадити похідну узагальненої функції, як границю, відому з класичного аналіза (при цьому зсув є коректним за формулою (9)) [16]:

$$f'(x) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha} \tag{10}$$

Формула (10) дозволяє розповсюдити деякі теореми класичного аналізу з використанням класичного означення похідної. Тепер, за наявності коректно визначеного поняття збіжності під значенням узагальненої функції в точці x_0 будемо розуміти наступне [16, 17]:

$$g(x) = \lim_{\alpha \to 0} f(\alpha x + x_0) \tag{11}$$

Коректність цього означення, поданого формулою (11) полягає в тому, що якщо така границя існує, то $g(x)$ - тотожня константа. У випадку, якщо в точці x_0 границя існує — точка регулярна, інакше сингулярна.

Аналогічно можна ввести поняття значення узагальненої функції на нескінченності [16]-[17]:

$$g(x) = \lim_{\beta \to \infty} f(x + \beta)$$

Наведемо декілька прикладів підрахунку значення узагальненої функції в точці:

1) Точка 0 є регулярною для послідовності, заданою формулою (2) оскільки:

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; f_n(x) = \frac{1}{1 + e^{-\alpha n x}} \to 1, \alpha \to 0.$$

Ця послідовність задає функцію H(t), проте функція Гевісайда не має значення в нулі, оскільки $\lim\limits_{\alpha \to 0} H(\alpha x)$ залежить від x та обраної послідовності $\alpha_n \to 0$, таким чином, 0 — нерегулярна точка функції Гевісайда.

2) Точка 0 є регулярною для первісних послідовності, заданою формулою (2):

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^x f_n(x)dt = \frac{ln(1 + e^{nx})}{n}$$

оскільки:

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; f_n(x) = \frac{ln(1 + e^{\alpha n x})}{n} \to 0, \alpha \to 0.$$

Ця послідовність задає функцію $\hat{H}(x)$, яка також має точку 0 за регулярну.

На основі попередніх прикладів можна побачити, що якщо для локально інтегровних функцій поняття значення в точці неперервності співпадає із звичним значенням функції. Якщо локально інтегровна функція до того має звичайну похідну в точці x_0, то її значення співпадає із значенням узагальненої похідної в цій точці. Зворотнє твердження не є вірним. Існують теореми існування значення функції (теореми Лоясевича [17]).

Користуючись поняттям значення узагальненої функції, запровадимо визначений інтеграл в два етапи [16]:

$$1)\ \int_a^b f(x+t)dt = \psi(x+b) - \psi(x+a),\ \ \psi'(x) = f(x), a, b \in (A, B) \quad (12)$$

Для локально інтегровних функцій значення цього виразу співпадає із значенням інтегралу. Важливим моментом є те, що кожна регулярна точка функції $f(x)$ є регулярною точкою невизначеного інтегралу. Таке визначення забезпечує виконання основних властивостей інтегралу, а також можливість граничного переходу під знаком інтеграла (за умови збіжності підінтегральних виразів):

$$2)\ \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x+t)\,|_{x=0} \quad (13)$$

Звідси, безпосередньо (за умови існування значення відповідних функцій на краях відрізку $[a, b]$):

$$\int_a^b f(t)dt = \psi(b) - \psi(a) \quad (14)$$

Нескладно побачити, що визначення інтегралу за формулою (14) є розширенням класичного означеного інтегралу.

Нарешті, згадаємо про ряди, членами яких є узагальнені функції. Як і поняття звичайного функціонального чи числового ряда, його можна визначити, як границю часткових сум, але в сенсі збіжності узагальнених функцій [16]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \quad (15)$$

Де $\{f_k\}$ — послідовність узагальнених функцій.

Важливою властивістю ряду, визначеного за формулою (15) є можливість диференціювати суму ряда лише за умови його збіжності. Для звичайних функціональних рядів, існує комплекс теорем, що встановлює умови для цієї операції. Важливим є також можливість безпосередньо переставляти інтегрування та диференціювання за умови збіжності ряду [16]:

$$\int_a^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^x f_n(t)dt$$

Продемонструємо властивості рядів узагальнених функцій. Розглянемо таку послідовність узагальнених функцій (Рисунок 2.9):

$$f_0(x) = \chi\{1 > |x| > 0.5\}, f_n(x) = \begin{cases} -1, & \frac{1}{n+1} < |x| \leq \frac{1}{n} \\ 1, & \frac{1}{n} < |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{n} f_k(x) = \begin{cases} n, & |x| \leq \frac{1}{n} \\ 0, & |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$$

Ця послідовність часткових сум прямує до δ-функції. (Рис . 2.9)

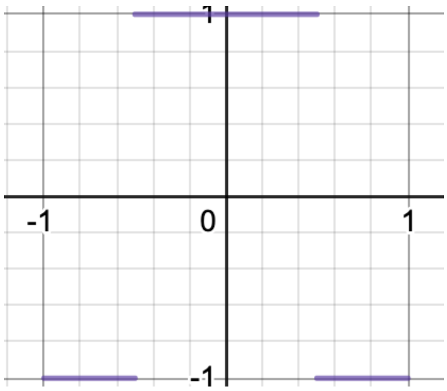


Рисунок 2.9 — перший член ряду прикладу 1)

$$2)\ g_n(x) = \frac{2(arctg((n+1)x) - arctg(nx))}{\pi}$$

Часткову суму та її похідну зображено на Рис. 2.10 та Рис. 2.11 відповідно:

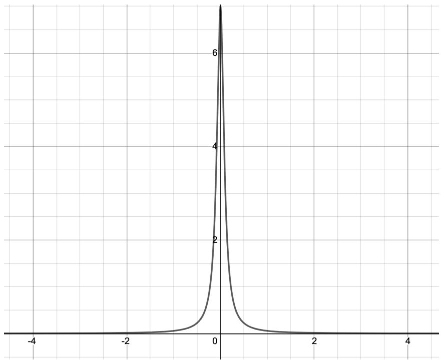


Рисунок 2.10 — часткова сума
$$\sum_{n=1}^{10} g_n'(x)$$

Рисунок 2.11 — часткова сума
$$\sum_{n=1}^{10} g_n(x)$$

Виходячи з того, що:

$$\frac{2arctg(nx)}{\pi} + 1 \to H(x)$$

маємо, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ збігається в узагальненому сенсі до функції $H(x)$, Похідна $g_n'(x)$ представляє з себе послідовність, що $\sum_{n=1}^{\infty} g_n'(x)$ збігається до δ -функції Дірака.

Завдяки запровадженим поняттям інтегрування та рядів узагальнених функцій за формулами (10-13) виникає можливість коректного запровадження розвинень у ряд Фурье (теорема Шварца), побудові інтегральних перетворень. Так, розвинення Фурье є узагальненням класичного, що будується в курсі математичного аналізу, та співпадає із рядом для неперервних функцій.

Під π-періодичною узагальненою функцією розуміють таку, що:

$$f(x+2\pi) = f(x)$$

Із означення інтеграла за формулою (11) від узагальненої функції маємо, що інтеграл функції по періоду існує для довільної періодичної функції. Означення збіжності рядів із узагальнених функцій дозволяє запровадити твердження, що відомо із класичного аналіза на π-періодичні узагальнені функціїї [16]-[17]:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n cos(nx) + b_n sin(nx))$$

Де $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(t)cos(nt)dt \quad \forall n = 0{,}1{,}2{,}\ldots;$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)sin(nt)dt \quad \forall n = 1{,}2{,}\ldots$

2.3 Добуток, композиція та згортка узагальнених функцій.

Коректне введення добутку є непростою задачею. Цю операцію будемо розглядати лише для випадку нескінченнодиференційовності функції $\omega(x)$, на яку множиться узагальнена функція $f(x)$. Таку операцію тоді можна запровадити наступним чином [16]:

$$\omega(x) * f(x) = [\omega(x) f_n(x)], \quad [f_n(x)] = f(x) \tag{16}$$

Представлення за формулою (16) коректне, оскільки $\{\omega(x) f_n(x)\}$ — фундаментальна (це можна довести, користуючись формулою похідної добутку), а також якщо послідовность $\{f_n(x)\} \sim \{g_n(x)\}$, то $\{\omega(x) f_n(x)\} \sim \{\omega(x) g_n(x)\}$. Із такого означення добутку безпосередньо випливають властивості комутативності, правої та лівої дистрибутивності. Допускає узагальнення і формула Лейбниця:

$$(\omega(x) * f(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \omega^{(k)}(x) f(x)^{(n-k)} \tag{17}$$

Із формули (17) можна безпосередньо виразити добуток $\omega(x) * f^{(n)}(x)$, якщо обрати в якості n невід'ємне ціле число із означення узагальненої функції, а в якості $f(x)$ неперервну функцію $F(x)$, що її задає, то можна отримати альтернативне означення добутку узагальненої функції на нескінченно диференційовну. Отримане означення (16) дозволяє також стверджувати, що при добутку збіжної послідовності узагальнених функцій $f_n(x)$ на нескінченно диференційовну функцію $\omega(x)$, границя просто домножується на $\omega(x)$ і навіть більше [16]:

$$\omega_n(x)f_n(x) \to \omega(x)f(x), \;\; \forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\}: \quad \omega_n^{(m)}(x) \rightrightarrows \omega^{(m)}(x), \;\; f_n(x) \to f(x)$$

Наведемо приклад добутку узагальнених функцій:

1) Розглянемо послідовність, задану за формулою (2) — ця функція задає узагальнену функцію Гевісайда, домножимо її на фукнцію $sin(x)$ (Рис. 2.12):

$$\frac{d}{dx}(\frac{sin(x)}{1+e^{-nx}}) \rightrightarrows \begin{cases} cos(x), & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

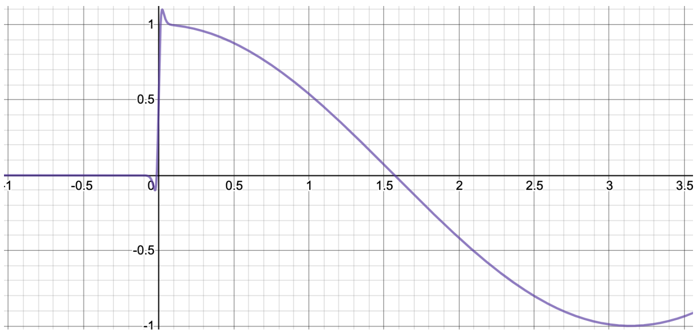


Рисунок 2.12 —графік $(f_{100}(x)\omega(x))'$

Це цілком узгоджується із формулою для похідної добутку:

$$\frac{d}{dx}(\frac{sin(x)}{1+e^{-nx}}) = \frac{cos(x)}{1+e^{-nx}} - \frac{nsin(x)e^{-nx}}{(1+e^{-nx})^2} \rightrightarrows cos(x)H(x) - sin(x)\delta(x) = cos(x)H(x)$$

2) $\int_0^x \omega'(t)H(t)dt = \omega(x)H(x) - \omega(0)H(x)$, такий добуток є коректним за умови нескінченнодиференційовності $\omega(x)$, тоді, користуючись правилом добутку, отримуємо:

$$\omega(x)'H(x) = \omega(x)'H(x) + \omega(x)\delta(x) - \omega(0)\delta(x) \to \omega(x)\delta(x) = \omega(0)\delta(x)$$

Таким чином отримуємо відому властивість δ-функції Дірака.

Нехай тепер $\varphi(x)$ — нескінченно диференційовна функція, похідна якої не перетворюється на нуль в жодній точці області визначення при цьому $\varphi : (A_0, B_0) \to (A, B)$, тоді можна визначити суперпозицію узагальнених функцій таким чином [16]:

$$f(\varphi(x)) = [f_n(\varphi(x))], x \in (A_0, B_0), f(x) = [f_n(x)]$$

Коректність цього означення вимагає фундаментальності послідовності $\{f_n(\varphi(x))\}$ та незалежності від вибору послідовності, що задає узагальнену функцію $f(x)$, тобто якщо $\{f_n(x)\} \sim \{g_n(x)\}$, то $\{f_n(\varphi(x))\} \sim \{g_n(\varphi(x))\}$ (Ці властивості виводяться за умови, що похідна не $\varphi(x)$ не дорівнює ніде на області визначення нулю. Тоді, аналогічно доведенню коректності добутку, можна використати формулу диференціювання композиції функцій). [16]

Аналогічно властивостям добутку узагальненої функції на нескінченно диференційовну, доводиться наступна властивість:

$$f_n(\varphi_n(x)) \to f(\varphi(x)), \ \ \forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \ \ \varphi_n^{(m)}(x) \rightrightarrows \varphi^{(m)}(x), \ \ f_n(x) \to f(x) \qquad (18)$$

Наведемо приклад композиції узагальнених функцій за формулою (18):

$$1)\, f_n(x) = \begin{cases} n - n^2|x|, & |x| \le \frac{1}{n} \\ 0, & |x| > \frac{1}{n} \end{cases}, \varphi_n(x) = x + (0.9)^n \sin(x), \ \ f_n(x) \to \delta(x),$$

Маємо, тоді, що:

$$f_n(\varphi_n(x)) \to \delta(\varphi(x)), \ \ \varphi_n(x) \rightrightarrows x,$$

дійсно, це підтверджується наведеними нижче малюнками та тим, що значення виразу $\int_{-\infty}^{\infty} f\left(h\left(t\right)\right) dt \to 1$ (Рис. 2.13-2.14).

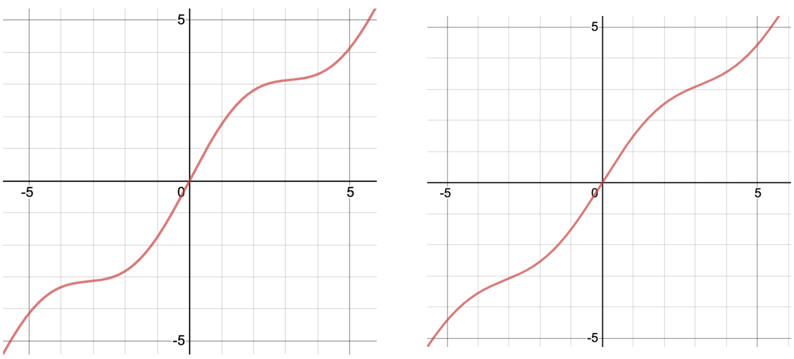


Рисунок 2.13 $-\varphi_1(x), \varphi_5(x)$, зліва направо

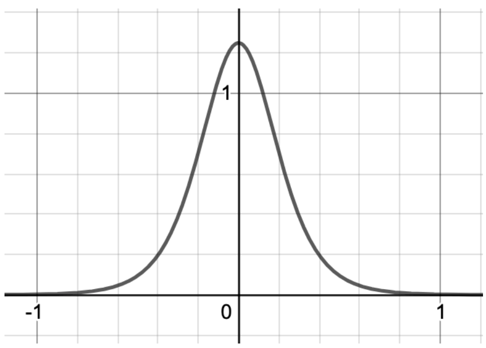


Рисунок 2.14 $-f_5(\varphi_5(x))$

2) Нехай $\varphi(x_0) = 0$, тоді ця точка єдина, оскільки інакше за теоремою Ролля, знайшлася б точка, в якій похідна дорівнює нулю. Отже, справедливо, що:

$$H(\varphi(x)) = \begin{cases} H(x - x_0), & \varphi'(x) > 0 \forall x \\ 1 - H(x - x_0), & \varphi'(x) < 0 \forall x \end{cases} \longrightarrow \delta(\varphi(x)) = \frac{\delta(x - x_0)}{|\varphi'(x_0)|}$$

Це узгоджується із результатами попереднього прикладу.

Однією з найважливіших операцій над узагальненими функціями, що будуть важливими для результатів цієї роботи є згортка узагальнених функцій. Згортку звичайних функцій визначають наступним чином класично, як [16]:

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - t)g(t)dt \tag{19}$$

За умови інтегровності $f(x - t)$ та $g(t)$ в сенсі Лебега за змінною t згортка, визначена за формулою (19), існує. Із такого означення випливає комутативність, лінійність за обома аргументами. Проте, не для всіх функцій згортка є асоціативною операцією. Виявляється, для цього необхідно, щоб існувала згортка трьох функцій, визначена як [16]:

$$f * g * h = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - t)g(t - u)h(u)dudt$$

Для коректного запровадження поняття згортки узагальнених функцій, необхідно запровадити поняття фінітної функції. Фінітною називають таку функцію, що вона не дорівнює нулю лише на певній обмеженій множині, що називається її носієм. Для побудови нас цікавитимуть нескінченно диференційовні фінітні функції з компактним носієм. Під дельта-подібною послідовністю будемо розуміти послідовність такого вигляду [16]:

1) $\delta_n(x) = 0, |x| \geq \alpha_n, \alpha_n \to 0$

2) $\alpha_n^k \int_{\mathbb{R}} |\delta_n^{(k)}| dx \leq M_k \forall n \in \mathbb{N}$

3) $\int_{\mathbb{R}} \delta_n(x)dx = 1, \ \ \forall n \in \mathbb{N}$

Дельта-подібні послідовності, визначені таким чином є замкнутою множиною відносно операції згортки. Під регулярною послідовністю будемо розуміти послідовність вигляду:

$$f_n = f * \delta_n,$$

де δ_n—дельта-подібна послідовність,
$f(x)$—локально інтегровна.
Якщо $f(x)$ — неперервна, то її регулярна послідовність збігається майже рівномірно до неї. Якщо $f(x)$, до того ж нескінченнодиференційовна, то довільна похідна k її регулярної послідовності прямує майже рівномірно до її $f^{(k)}(x)$. Нарешті, якщо $f_n \rightrightarrows f$, δ_n — дельтаподібна послідовність, то $f_n * \delta_n \rightrightarrows f$.

Введемо тепер згортку узагальнених функцій. Нехай спершу, $\varphi(x)$ — нескінченнодиференційовна функція з компактним носієм, якщо $\{f_n\}$ — фундаментальна послідовність на (A, B), тоді $\{f_n * \varphi\}$ — фундаментальна послідовність. Нехай тепер δ_n — дельтаподібна послідовність, а f — узагальнена функція, тоді $\{f * \delta_n\} \to f$ в сенсі узагальнених функцій. Розглянемо дві узагальнених функції f, g. Будемо вважати, що згортка цих функцій є визначена, якщо [16]:

$$s_n = f_n * g_n, \quad f_n = f * \delta_n, \quad g_n = g * \delta_n, \quad \forall \delta_n$$

Де δ_n— дельтаподібна послідовність,
s_n — гладко визначена (тобто $\forall k_1 k_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\} : s_n^{(k_1)} * s_n^{(k_2)}$ —неперервна, а $| s_n^{(k_1)} | * | s_n^{(k_2)} |$ — локально інтегровна).

Таке, достатньо вимогливе визначення, є коректним, бо не залежить від вибору дельта-подібної послідовності. Таким чином, згортка не є регулярною операцією, оскільки для довільних фундаментальних послідовностей $f_n(x), g_n(x)$ — їх згортка не обов'язково є фундаментальною. Так, для локально інтегровних функцій, для яких існує згортка модулей існує згортка їх регулярних послідовностей є гладко визначеною для довільних дельта-подібних послідовностей. Таке визначення згортки дозволяє відразу отримати деякі властивості, наприклад, дистрибутивність, добуток на константу, комутативність. Також, якщо є визначеною згортка вихідних узагальнених функцій, то вона має похідну довільного порядку, що задається формулою [16]:

$$(f * g)^{(k)} = f^{(k)} * g = f * g^{(k)}$$

2.4 Застосування узагальнених функцій до розв'язку диференціальних рівнянь.

У попередніх параграфах було детально викладено побудову узагальненої функції з використанням секвенціального підходу. Так, було запроваджено це поняття через послідовності звичайних функцій певного вигляду. Було проведено узагальнення звичайних операцій диференціювання, інтегрування. Запроваджено добуток та композицію із функціями певного вигляду. Нарешті було запроваджено згортку, що виявилося достатньо громіздкою процедурою. В цьому розділі будуть виокремлені властивості, що необхідні до розв'язку диференціальних рівнянь, узагальнених функцій, що побудовані із застосуванням секвенціального підходу.

Передусім, $f^{(k)} = 0$, тоді і тільки тоді, якщо $f = p_s$, $s < k$, де p_s — многочлен степені s. Достатність випливає безпосередньо із означення. Необхідність вимагає побудови двох послідовностей, що визначають f та тотожньо нульову узагальнену функцію. Із цього твердження безпосередньо випливають два основних твердження, що мають застосування в теорії диференціальних рівнянь:

$$f' = g' \leftrightarrow f = g + C.$$

Варто зазначити, що у основних роботах не розглядається застосування секвенціального підходу до розв'язку диференціальних рівнянь. Формально описуємо диференціальне рівняння, як вираз:

$$Lu = f$$

f, u —узагальнені функції, визначені на одному проміжку;
L — лінійний диференціальний оператор.

Для простоти теоретичних , працюватимемо із лінійними операторами. Ця рівність, із секнценціальної точки зору, означає, що:

$$\exists \{U_n\}, \{F_n\},\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \quad [Lu_n] = [f_n],\ \ u_n = U_n^{(k)}, f_n = F_n^{(k)} \tag{20}$$

У виразі (20), число k можна обрати спільним для узагальнених функцій f, u (з посиланням на результати першого параграфа розділу 2). Можна стверджувати, що число k для фунції u є не більшим від цього числа для f, оскільки дія диференціального оператору не зменшує значення k. Можна підвищити порядок диференціювання, ввівши новий оператор:

$$\hat{L} = L\frac{d^k}{dx^k} = \frac{d^k}{dx^k}L,$$

отримаємо тоді:

$$Lu = f \leftrightarrow$$
$$\exists \{U_n\}, \{F_n\},\, k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \quad [\hat{L}U_n] = [\frac{d^k}{dx^k}F_n]$$

Для простоти обмежемося оператором L, що має порядок менший від k, таким чином отримаємо:

$$[\hat{L}U_n] = [\frac{d^k}{dx^k}F_n] \leftrightarrow [\frac{d^k}{dx^k}(LU_n - F_n)] = 0$$

Таким чином, внутрішній вираз є многочленом степені менше від k:

$$[LU_n - F_n] = [p_n^{s<k}] \longleftrightarrow [LU_n] = [p_n^{s<k} + F_n] \qquad (21)$$

Оскільки послідовність $\{U_n\}, \{F_n\}$ — принаймні k разів диференційовні, як звичайні функції, то із формули (21) випливає те, що розв'язок такого рівняння можна шукати, як розв'язок звичайного диференціального рівняння. Шукатимемо його у вигляді суми:

$$[LU_n^1] = [p_{s<k}],$$
$$[LU_n^2] = [F_n], \forall n \in \mathbb{N}$$

Розв'язок другого рівняння можна шукати класичними методами. Для першого, є невідомою права частина. Зазначимо, що загальний розв'язок буде мати вигляд:

$$[U_n] = [U_o + U_n^1 + U_n^2],$$

U_o—однорідний розв'язок;
U_n^1 — многочлен, степінь якого залежить від кратності нульового кореня характеристичного рівняння диференціального оператора;
U_n^2 — розв'язок другого рівнняя.

Припустимо, поки що, для простоти, що характеристичне рівняння оператора L не має нульових коренів. Тоді U_n^1 при диференціюванні k разів зникає і ,отже, розв'язок визначається лише через U_o та U_n^1. Таким чином, звели задачу до розв'язку звичайних диференціальних рівнянь.

Зазначимо, що для практичного застосування отриманих результатів, варто пояснити коректність запровадженого визначення, а саме, розв'язок рівняння не залежить від послідовностей, що формують клас еквівалентності. Нехай дві послідовності $\{F_n^1\}, \{F_n^2\}$ задають узагальнену функцію f, покажемо, що розв'язки $\{U_n^1\}, \{U_n^2\}$ задають узагальнений розв'язок u. Дійсно, оскільки:

$$\begin{cases} LU_n^1 = F_n^1 \\ LU_n^2 = F_n^2 \end{cases} \longrightarrow L(U_n^1 - U_n^2) = F_n^1 - F_n^2 \to L(u^1 - u^2) = 0,$$

$$[U_n^{1(k)}] = u_1, [U_n^{2(k)}] = u_2$$

Розв'язок однорідного рівняння (він буде звичайним у випадку гладкості коефіцієнтів диференціального оператора). Тоді, маємо:

$$u^1 = u^o + u^2 = u^o + u^o + u^c = u^o + u^c\ .$$

Де u^o — однорідний розв'язок;
u^c —частковий розв'язок.
З посиланням на довільність вибору u^1 та того факту, що розв'язки однорідного утворюють підпростір, отримуємо рівність всіх розв'язків між собою.

Той факт, що довільний узагальнений розв'зок рівнняя є сумою часткового розв'язку неоднорідного та однорідного доводиться аналогічно класичному результату теорії диференціальних рівнянь. Наведемо приклад:
було доведено, що послідовність, що задана формулою (2), задає δ-функцію із числом $k = 2$. Розглянемо диференціальне рівняння:

$$u'' + 2u' + u = \delta \tag{22}$$

Рівнянню (22) відповідає так званий фундаментальний розв'язок оператора L. Оскільки порядок рівняння не більший від k, то шукатимемо розв'язок, як:

$$U_n'' + 2U_n' + U_n = \frac{ln(1 + e^{nx})}{n} \tag{23}$$

Розв'язок рівняння (23) можна віднайти чисельно (Рис. 2.15-2.18), користуючись методом Рунге-Кута 4-го порядку, альтернативна права частина:

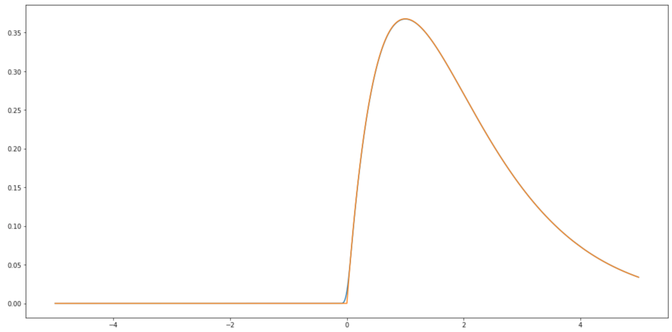


Рисунок 2.15 — 10 член послідовності $U_n^{''1}$ (блакитний)
Справжній розв'язок.
(помаранчевий)

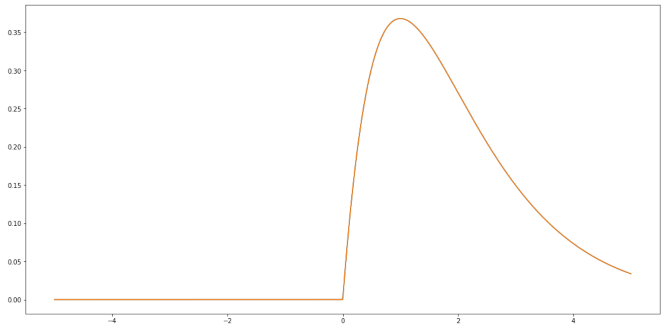


Рисунок 2.16 — 50 член послідовності $U_n^{''1}$ (блакитний)
Справжній розв'язок.
(помаранчевий)

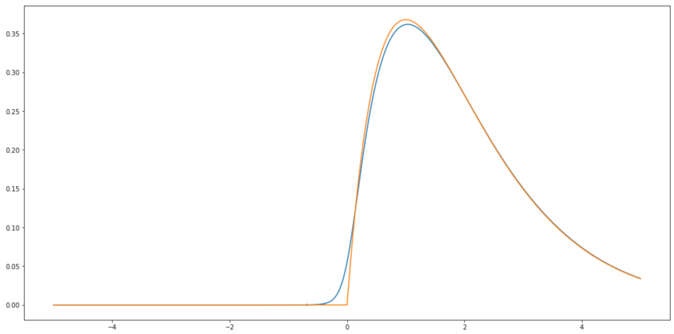


Рисунок 2.17 — 10 член послідовності $U_n^{''2}$ (блакитний)
Справжній розв'язок.
(помаранчевий)

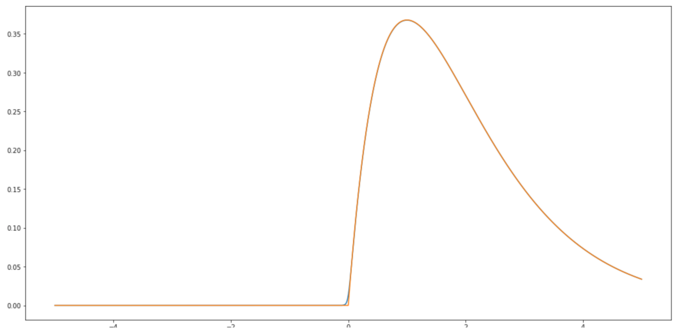


Рисунок 2.18 — 50 член послідовності $U_n^{''2}$ (блакитний)
Справжній розв'язок.
(помаранчевий)

$$2) g_n(x) = \int_{-\infty}^{x} \hat{G}_n(t)dt = \begin{cases} 0, \quad x \le \frac{-1}{n} \\ \frac{n^2x^3}{6} + \frac{nx^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{6n}, \frac{-1}{n} < x \le 0 \\ -\frac{n^2x^3}{6} + \frac{nx^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{6n}, 0 < x \le \frac{1}{n} \\ x, \quad x > \frac{1}{n} \end{cases}$$

Де $\hat{G}_n(t)$ —первісна послідовності у правій частині рівняння (21)
Ця послідовність, як вже доводилося у першому підрозділі другого розділу , також задає δ-функцію із числом $k = 2$.

Порівняння двох послідовностей дозволяє встановити те, що перша прямує до фундаментального розв'язку швидше, це наведено у таблиці 2.1. Певні припущення, щодо швидкості збіжності можна висунути, якщо згадати про нескінченнодиференційовність першої послідовності:

Таблиця 2.1 — Точність наближення фундаментального розв'язку рівняння (20).

Послідовність	Номер	Точність наближення
$U_n''^1$	10	0.01561
$U_n''^1$	50	0.0031
$U_n''^2$	10	0.05504
$U_n''^2$	50	0.013

Отже, можна зробити висновок, що послідовність, що є нескінченно диференційовною, дає краще наближення.

Точний фундаментальний розв'зок можна отримати, користуючись перетворенням Лапласа (узагальненим). Він задається наступним виразом:

$$y_f = te^{-t}H(t) \tag{24}$$

Таким чином, можна побачити, що друга похідна обох послідовностей (що відповідає $k=2$), дійсно задає послідовність, що прямує до справжнього фундаментального розв'язку, заданого формулою (24).

Зазначимо, що припущення, про те, що порядок рівняння є меншим від k не є суттєвим — за нагальної потреби це число можна збільшити для послідовностей, що задають узагальнені функції та розв'язувати рівняння для них. Це також знімає обмеження на кратність коренів характеристичного рівняння.

2.5 Порівняння функціонального та секвенціального підходів

В попередніх параграфах було розглянуто побудову узагальнених функцій з використанням секвенціального підходу. Основним підходом, яким користуються на практиці, є функціональний підхід. Достатньо природнім є порівняння двох підходів: виокремлення їх недоліків та переваг, пошук взаємозв'язку, тощо. Саме цю мету ставить перед собою даний параграф.

Почнемо із переваг секвенціального підходу. Оскільки викладена теорія базується переважно на відомих фактах математичного аналіза та не вимагає застосування складної теорії функціонального аналіза, то можна віднести це до переваг даного підходу. Варто відмітити те, що секвенціальний підхід також є достатньо природнім. Як вже згадувалося, така побудова нагадує побудову дійсних чисел за допомогою розширення фундаментальних послідовностей раціональних чисел. Інша перевага цього підходу полягає в тому, що для роботи із узагальненими функціями, дослідник може працювати із звичайними послідовностями. Так, у попередньому параграфі було запроваджено пошук узагальненого розв’язку диференціальних рівнянь із використанням секвенціального підходу. Важливим наслідком попередніх переваг цього підходу полягає в тому, що велика кількість доведень теорем є набаго простішою, аніж для функціонального підходу.

Недоліки секвенціального підходу переважно стосуються проблем викладення теорії. Оскільки досліджень в цій області було не так багато, як в області функціонального підходу, ця теорія є далеко не настільки досконалою. Так, певні вимоги є надлишковими та можуть бути спрощені, а застосування цього підходу є непристосованою до теорії диференціальних рівнянь. В минулому параграфі автором було власноруч запропоновано підхід до розв’язку диференціальних рівнянь із використанням секвенціального підходу, що доводить нерозвиненість цього способу введення узагальнених функцій. Також, певні результати вимагають більш кропіткої роботи. Це гарно видно на прикладі введення операції згортки.

Функціональний підхід, на відміну від секвенціального, є більш теоретично пропрацьований. Він є більш універсальним, має широке застосування до вирішення задач математичної фізики та дозволяє легке узагальнення на просторі щонайрізноманітніших носіїв пробних функцій. Більш простим є введення операцій, таких як згортка, диференціювання та інші. Певні теореми мають простіше доведення.

Великим недоліком функціонального підходу є складна теоретична база, що необхідна для коректного застосування апарату узагальнених функцій. Це робить складним процес викладання цього підходу, а також використання на практиці науковцями, що мають засвоїти складну теорію. Ще одним недоліком є те, що певні результати функціонального підходу є складнішими в доведенні, аніж такі для секвенціального.

Незважаючи на кардинальну розбіжність підходів до введення узагальнених функцій, між ними існує достатньо чіткий зв’язок, що легко встановлюється.

Секвенціальний → Функціональний:

$$< f, \varphi > = \forall \varphi \in D(A) : \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\varphi(x)dx = \lim_{n\to\infty} (-1)^k \int_{-\infty}^{\infty} F_n(x)\varphi^{(k)}(x)dx,$$

f — узагальнена функція;
$\{f_n\}$ — послідовність, що $[f_n] = f$;
$\{F_n\}$ — послідовність, що узгоджена із $\{f_n\}$ за означенням фундаментальності;
k — число, що узгоджено із $\{f_n\}$ за означенням фундаментальності;
Оскільки:

$$F_n \rightrightarrows F, F \in C(A)$$

Де F — функція із означення фундаментальної послідовності, заданої в (1)
Маємо, що $< f, \varphi >$ визначено (можна виконати граничний перехід під інтегралом) та це визначення коректне (в силу того, що границі функціональних послідовностей, що визначають f однакові). Більш того, значення цього виразу неперервно залежить від основної функції. Дійсно, якщо:

$$\varphi_n \to 0 \text{ то } < f, \varphi_n > = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}(-1)^{(k)}\int_{-\infty}^{\infty}F_n(x)\varphi_m^{(k)}(x)dx = 0 \qquad (25)$$

Де $\{\varphi_n\}$ — послідовність пробних функцій.
(подвійна границя перетворюється на повторну, оскільки обидві послідовності збігаються майже рівномірно). Таким чином, функціонал, заданий за формулою (25) описаним вище способом, є лінійний та неперервний, тому задає узагальнену функцію в сенсі функціонального підходу. До того ж, із побудови стає зрозуміло, що різні узагальнені функції в секвенціальному сенсі породжують різні функціонали на просторі основних функцій.

Функціональний → Секвенціальний [18]:
Розглянемо таку основну функцію $\alpha(x)$, що її носій — відрізок [-1, 1], $\alpha(x)$ — парна та невід'ємна, та $\int_{-\infty}^{\infty}\alpha(x)dx = 1$ позначимо тоді послідовність:

$$\alpha_m(x) = m\alpha(m(x-t))$$

Де m — натуральне число.
Нехай:

$$\varphi_m(x) = \alpha_m * \varphi,$$

Де φ — пробна функція.
Якщо f — узагальнена функція в сенсі функціонального підходу, то:

$$< f, \varphi > = \lim_{m\to\infty}(g_m * \varphi), \quad g_m(x) = < f, \alpha_m > ,$$

маємо:

$$g_m * \varphi = < f, \varphi_m > ,$$

$$< f, \varphi_m > \to < f, \varphi >$$

а отже:

$$g_m * \varphi \to < f, \varphi > .$$

Таким чином (в силу того, що згортка узагальненої функції із основною є основною функцією) отримали послідовність, що задає узагальнену функцію f в сенсі секвенціального підходу. Оскільки ми обрали основну функцію $\alpha(x)$ спеціального вигляду (а саме дельта подібного), то при різному виборі цієї функції отримуємо різні послідовності, що задають узагальнену функцію f. Побудоване відношення «задавати один і той самий функціонал f» є відношенням еквівалентності на просторі функцій. Для простоти виконували доведення на відрізку $[-1,1]$, проте це не є принциповим.

Отже, отримали взаємооднозначну відповідність між двома підходами до побудови узагальнених функцій. Стало зрозуміло, що ці два підходи є еквівалентними, що дозволяє використостовувати за необхідності більш зручний та здійснювати перехід за необхідності через побудоване відображення між ними.

Висновки

В цьому розділі було докладно викладено аспекти побудови теорії узагальнених функцій на основі секвенціального підходу. Виявилося, що запровадження цього поняття, виявляється більш теоретично простим та природнім, аніж викладення на мові функціонального підходу. Так, легко та природньо запроваджуються більшість операцій, а також, що не менш важливим, наводиться чисельна кількість прикладів-ілюстрацій до цих операцій. Вони спрямовні на те, щоб продемонструвати коректність виконаної побудови та дати змогу зрозуміти процес викладення теорії.

Нажаль, побудована теорія не є бездоганною. Саме тому, останній параграф ставить за свою мету розмежування двох розглянутих підходів, побудови відповідності. Проведене дослідження дозволяє уникати можливих непорозумінь та у випадку потреби, змінювати підхід, за допомогою розглянутого способу побудови взаємооднозначної відповідності.

Одним із суттєвих недоліків побудованої теорії є те, що її автори не розглядали її застосування до розв’язку диференціальних рівнянь. Таке рішення можна пояснити тим, що функціональний підхід має більш гнучке на універсальне використання до розв’язку узагальнених диференціальних рівнянь. Проте не варто забувати про секвенціальний підхід. Так, основна перевага запропонованого способу розв'язку полягає в тому, що вона дозволяє застосувати класичні чисельні методи до розв'язку послідовності диференціальних рівнянь. Така процедура, хоча і є достатньо кропіткою, створює певний апарат загального підходу до пошуку узагальнених розв'язків. Це є дуже важлими до пошуку розв'язків рівнянь математичної фізики з використанням чисельних методів. Нарешті, це створює перспективу на майбутнє, адже побудована теорія стосується лише рівнянь із однією змінною.

Наступний, третій параграф ставить за мету описати застосування описаного алгоритму розв'язку узагальнених диференціальних рівнянь, а саме: використання для пошуку фундаментальних розв'язків, робота із лінійними рівняннями із змінними коефіцієнтами тощо. Нарешті, будуть викладені спроби вирішення певних відомих рівнянь.

3 ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ЗБІЖНОСТІ РОЗВ’ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

3.1 Опис чисельних методів, що застосовувалися при моделюванні

В минулому розділі було наведено приклад застосування побудованого підходу до розв’язку узагальнених диференціальних рівнянь із використанням секвенціального підходу. Третій розділ ставить за мету, передусім, виокремити якомога більше тестовим прикладів «різної природи». Опишемо методи, за допомогою яких буде здійснюватися чисельне моделювання.

При розв’язку звичайних диференціальних рівнянь буде використано метод Рунге-Кута четвертого порядку.

Чисельне моделювання для диферецiальних рівнянь у частинних похідних, для наочності, будемо проводити для розмірності 2. Такий вибір обумовлений наочнітю результатів моделювання, що дозволить краще усвідомити наукові досягнення, що описуються в даній роботію Я якості чисельного методу обираємо метод скінченних різниць. Отриману систему лінійних рівнянь будемо розв’язувати чисельно, а саме методом Гауса-Зайделя, оскільки вона має розмірність n^2 (у випадку квадратної області із рівними кроками по осях, де n — кількість елементів дискретної сітки). Збіжність цього методу є лінійною із коефіцієнтом [19]:

$$det((L+D)^{-1}U), \quad A = L + D + U,$$

Де A — матриця системи (пентагональна);
L—нижньо-діагональна матриця системи;
U — верхньо-діагональна матриця системи;
D — діагональна матриця системи.

Для того, щоб прискорити збіжність, будемо обирати початкові умови стандартними випадковими гаусівськими величинами.

Оскільки описаний метод вимагає диференціювання послідовності розв’язків диференціальних рівнянь, будемо використовувати стандартну різнецеву схему із точністю наближення $O(h^2)$. Для наочності результатів, обираємо крок інтегрування $h = 10^{-5}$ для звичайних диференціальних рівнянь, та 10^{-3} для рівнянь у часткових похідних. [19]

Описані підходи будуть використовуватися протягом моделювання. Зазначимо, що для візуалізації отиманих результатів та написання програмного коду тестових прикладів будемо використовувати моу програмування Python та бібліотеку matplotlib.

3.2 Фундаментальні розв’язки лінійних диференціальних рівнянь типу Ейлера

Для теоретичного та практичного застосування велику роль відіграють фундаментальні розв’язки диференціальних рівнянь, що знаходить своє використання у багатьох прикладних задачах. У минилому розділі було коректно запроваджено поняття узазагальненого розв’язку диференціального рівняння з точки зору секвенціального підходу. Розглянемо клас диференціальних рівнянь — Ейлера. Нагадаємо, що неоднорідне рівняння Ейлера мають вигляд:

$$x^n u^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k u^{(k)} = f(x) \tag{1}$$

$f(x) = 0, \forall x > 0$ у правій частині рівняння (1), то маємо справу із однорідним рівнянням Ейлера. Для визначеності вважатимемо, що $x > 0$. Тоді заміною незалежної $x = e^t$ воно зводиться до рівняння із сталими коефіцієнтами. Нехай, тепер маємо справу із узагальненим диференціальним рівнянням типу Ейлера:

$$Eu = f$$

Де E —лінійний оператор, що відповідає рівнянню Ейлера.

Оскільки функції Функції x^k нескінченно диференційовні за довільного k, то добуток визначено. Заміна незалежної змінної, описана у розділі 2, задовільняє вимогам коректності суперпозиції узагальнених функцій, тому, формально, можемо записати:

$$Eu\,|_{x=e^t} = f\,|_{x=e^t} \tag{2}$$

Покажемо, що рівняння (2) має сталі коефіцієни. Дійсно:

$$f'(x(t)) = [f_n'(x(t))] = [\frac{df_n}{dx} * \frac{dx}{dt}] = [\frac{df_n}{dx}] * [\frac{dx}{dt}] \longrightarrow [\frac{df_n}{dx}] = [\frac{dt}{dx} * f_n'(x(t))],$$

$$x(t) = e^t \rightarrow \frac{dt}{dx} = e^{-t}$$

отже:

$$f'(x(t)) = e^{-t} f'(t)$$

Повторюючи цю процедуру почергово, отримаємо те, що при підстановці відповідних функцій у диференціальне рівняння та із врахуванням проведеної підстановки, отримаємо рівняння із постійними коефіцієнтами. Розглянемо наприклад наступне рівняння Ейлера:

$$x^2y'' + xy' + y = 0, \; x = e^t \longrightarrow y''|_{x=e^t} + y|_{x=e^t} = 0 \tag{3}$$

Фундаментальним розв’язком диференціального рівняння (3) є функція:

$$y_f|_{x=e^t} = sin(t)H(t).$$

Фіксуємо конкретно дельта-подібну послідовність:

$$f_n(x) = \frac{ne^{-nx}}{(1+e^{-nx})^2}$$

Результати чисельного моделювання наведено на Рис. 3.1—3.2:

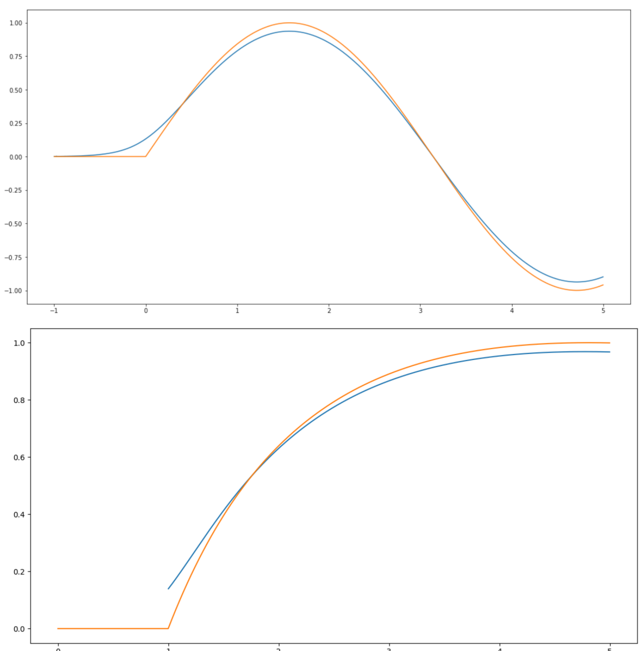


Рисунок 3.1 (згори): $u|^5_{x=e^t}$ —блакитний, $y_f|_{x=e^t}$ — помаранчевий. (знизу): u^5 — блакитний, y_f — помаранчевий

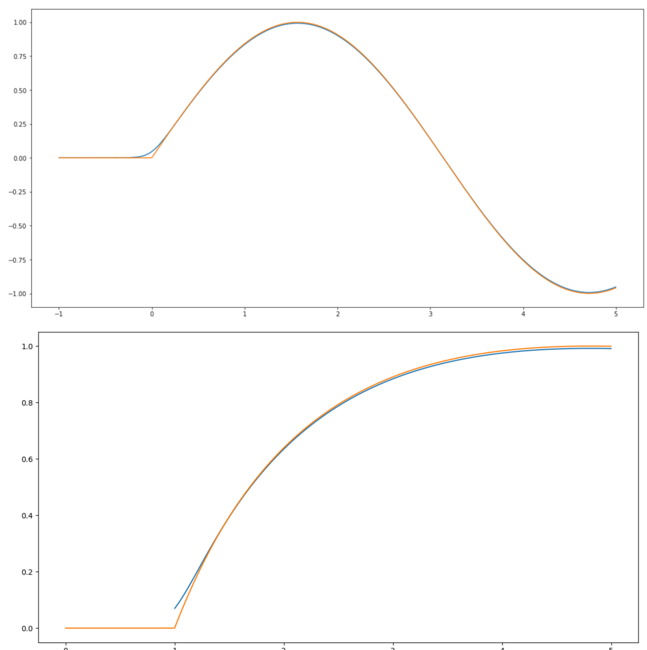


Рисунок 3.2 (згори): $u|^{10}_{x=e^t}$ —блакитний, $y_f|_{x=e^t}$ — помаранчевий. (знизу): u^{10} — блакитний, y_f — помаранчевий

Фундаментальний розв’язок цього рівняння Ейлера є:

$$y_f = sin(ln(x))H(ln(x)).$$

Зазначимо, що наведений приклад ілюструє не просто можливість пошуку фундаментального розв'язку рівняння Ейлера, а також те, що заміна, що зводить рівняння до рівняння з постійними коефіцієнтами зберігає збіжність.

3.3 Застосування до пошуку фундаментальних розв'язків лінійних систем диференціальних рівнянь

В результаті попредніх викладок та факту, що довільна система диференціальних рівнянь може бути приведена до вигляду множини лінійних диференціальних рівняннь із однією невідомою функцією, можемо узагальнити розвинену теорію на це випадок. Продемонструємо це на прикладі системи:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x'' + x = 0 \\ y'' + y = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Знайдемо фундаментальний розв'язок рівнянь системи (4) як:

$$f = (x_f, y_f),$$

Де x_f, y_f — фундаментальні розв'язки першого та другого рівнянь відповідно системи (4).

Звичайно, від не буде мати властивість векторного фундаментального розв'язку, проте за його використання можна отримати покоординатні розв'язки, та відновити розв'язок системи.

Таким чином побудована теорія узагальнюється на випадок систем. Формально в даній роботі не розглядалася побудова теорії на випадок функцій багатьох змінних, оскільки це вимагало би більш кропітної роботи, та здебільшого узагальнювало би одновимірні властивості. Це, нажаль є слабким місцем цієї теорії, що вже згадувалося у попередніх розділах.

3.4 Застосування до пошуку фундаментальних розв'язків задач математичної фізики

В минулому розділі було докладно викладено побудову узагальнених функцій однієї дійсної змінної з використанням секвенціального підходу. В кінці розділу було запропоновано підхід до пошуку узагальнених розв'язків диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами. Нарешті, на початку цього розділу було показано, що для рівнянь Ейлера із певною заміною змінної, справедливі отримані результати. Такий спосіб виявився дієвим та достатньо універсальним, так як дає можливість за допомогою чисельних методів отримати узагальнений розв'язок, розв'язуючи послідовність звичайних диференціальних рівнянь. В цьому пункті третього розділу, автор покаже, що цим підходом можна користуватися для пошуку фундаментальних розв'язків узагальнених рівнянь в часткових похідних. Розглянемо оператор Лапласа на площині:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} \tag{5}$$

Фундаментальний розв'язок оператора (5), визначається як:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} ln(||x||) \tag{6}$$

що відповідає розв'язку рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = \delta(x, y)$$

Фундаментальний розв'язок (6) має таку властивість, що його згортка із правою частиною рівняння Пуасона дає його розв'язок:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = f(x, y) \tag{7}$$

На відміну від функцій однієї змінної в цьому випадку треба розробити інший підхід. Зазначимо спершу, що дві послідовності функцій $\{\varphi_n(x)\}, \{\psi_n(x)\}$ багатьох змінних визначають одну узагальнену функцію, якщо:

$$\exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \{F_n(x)\}, \{G_n(x)\} :$$
$$F_n(x) \rightrightarrows \leftleftarrows G_n(x), \frac{\partial^k, \ldots \partial^k}{\partial^k x_1, \ldots \partial^k x_m} F_n(x) = \varphi_n(x), \frac{\partial^k, \ldots \partial^k}{\partial^k x_1, \ldots \partial^k x_m} G_n(x) = \psi_n(x)$$

Де m — розмірність підпростору.

Запишемо довільне Лінійне рівняння в частинних похідних:

$$\sum_{i,j} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f \longleftrightarrow \sum_{i,j} a_{ij}[\frac{\partial^2 U_n}{\partial x \partial y}] = [F_n] + [p_n^{s<k}] \tag{7}$$

Де F_n, U_n — послідовності неперервних функцій, що задають узагальнені функції F, U відповідно;
$[p_n^{s<k}]$ — клас многочленів степені менше від k.
a_{ij} — дійсні чи комплексні числа.
Можна повторити міркування розділу два, що доводять коректність пошуку розв'язку як границю послідовності розв'язків рівняння. Зазначимо, що процедура в даному випадку є більш виснажливою, адже при пошуку фундаментального розв'язку необхідно виконувати чотирьохкратне інтегрування. Переформулюємо рівняння (7)(поки що не враховуючи збіжність):

$$(\frac{\partial^2 U_n}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 U_n}{\partial^2 y}) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{y_1} f_n(x_1, y_1)dxdx_1dydy_1$$

Розглянемо дельтаподібну послідовність, що відповідає послідовності вигляду:

$$f_n(x,y) = \begin{cases} \frac{n^2}{4}, & max\{|x|, |y|\} < \frac{1}{n} \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

Ця послідовність є дельтаподібною. Інтегруємо її двічі.

$$F_n(x,y) = \begin{cases} 0, & x \leq -\frac{1}{n} \ or \ y \leq -\frac{1}{n} \\ (x+\frac{1}{n})(y+\frac{1}{n}), & max\{|x|, |y|\} \leq \frac{1}{n} \\ (x+\frac{1}{n})\frac{2}{n}, & |x| \leq \frac{1}{n}, y > \frac{1}{n} \\ (y+\frac{1}{n})\frac{2}{n}, & |y| \leq \frac{1}{n}, x > \frac{1}{n} \\ 1, & min\{x,y\} > \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$\hat{F}_n(x,y) = \begin{cases} 0, \;\; x \le -\frac{1}{n} \; or \; y \le -\frac{1}{n} \\ (\frac{x^2}{2} + \frac{x}{n} + \frac{1}{2n^2})(\frac{y^2}{2} + \frac{y}{n} + \frac{1}{2n^2}), \;\; max\{|x|, |y|\} \le \frac{1}{n} \\ \frac{2x}{n}(\frac{y^2}{2} + \frac{y}{n} + \frac{1}{2n^2}), \;\; |y| \le \frac{1}{n}, x > \frac{1}{n} \\ \frac{2y}{n}(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{n} + \frac{1}{2x^2}), \;\; |x| \le \frac{1}{n}, y > \frac{1}{n} \\ -\frac{4}{n^4} + \frac{4x}{n^3} + \frac{4y}{n^3} + (x - \frac{1}{n})(y - \frac{1}{n}), \;\; min\{x, y\} > \frac{1}{n} \end{cases} \tag{7}$$

Де $F_n(x,y)$, $\hat{F}_n(x,y)$ — відповідно перші та друга первісна.

Даний розв’язок прямує до дійсного фундаментального розв’язку (6).(Рисунки. 3.3 — 3.4)

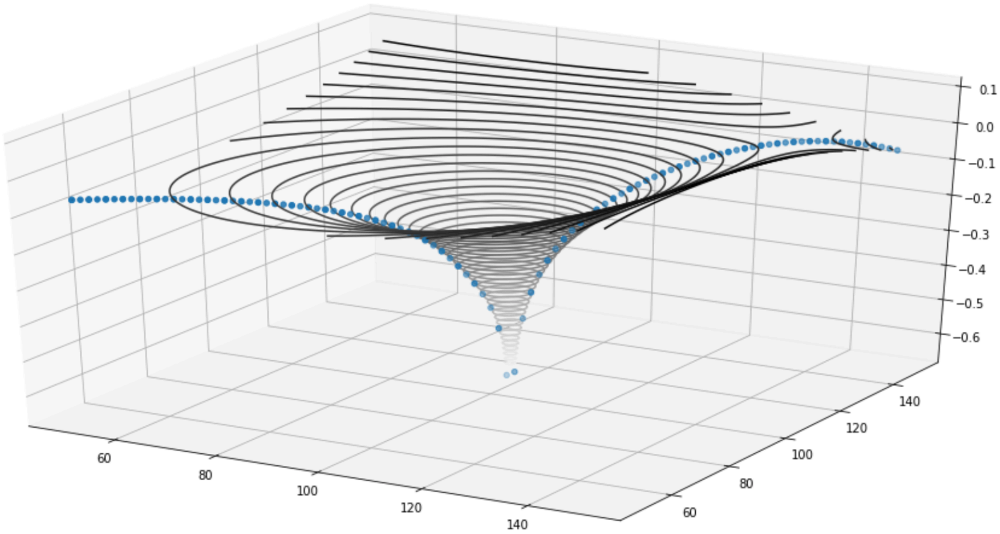


Рисунок 3.3 —Наближений розв’язок n=5

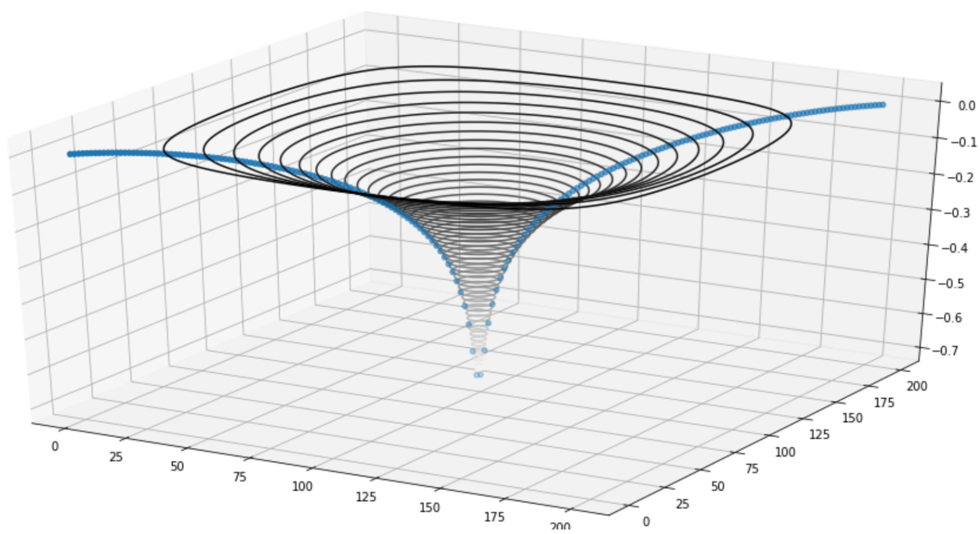


Рисунок 3.4 — Справжній розв’язок

Отже вже на перших ітераціях характер поверхні розв'язку співпадає із дійсним фундаментальним.

Розглянемо застосування побудованої теорії до більш складних об'єктів (для наочності результатів проводимо дослідження у двовимірному випадку). Нехай маємо рівняння:

$$(\Delta - \lambda^2)u = f \tag{8}$$

Де λ — коефіцієнт-константа.

Рівняння (8) має назву Екранованого рівняння Пуасона. Сфера його застосування належить до квантової механіки та тісно пов'язана із екрануванням поля у плазмі. Розглянемо двовимірний випадок та будемо шукати його фундаментальний розв'язок із послідовністю (7) у правій частині (Рис. 3.5):

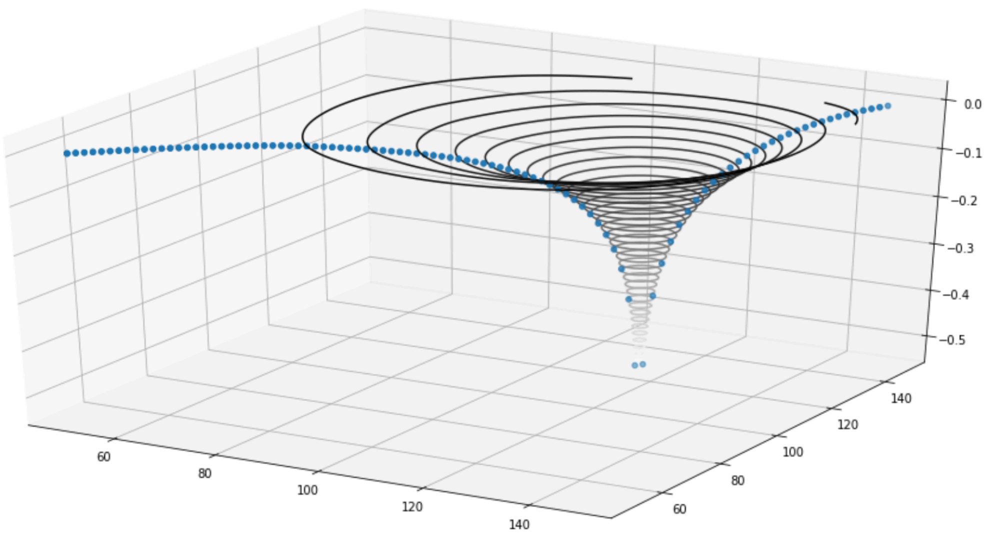


Рисунок 3.5—Наближений розв'язок k=5

Точний фундаментальний розв'язок екранованого рівняння Пуасона на площині не виражається у звичайних функціях та має вигляд:

$$y_f = -\frac{1}{2\pi}K_0(\lambda||x||) \tag{9}$$

Де $K_0(x)$ — Модифікована функція Беселя другого роду.

$\lambda > 0$— константа, що фігурувала у рівнянні (7).

Таким чином можна побачити, що дійсно, послідовності узагальнених розв'язків диференціальних рівнянь типу (8) задає фундаментальний розв'язок (9) (Рис. 3.6). При цьому швидкість збіжності є більш ніж задовільною та залежить більше від розміру кроку дискретизації. Так, у розглянутих в даному параграфі прикладах, точність була би кращою, ябки було взяти більш дрібне розбиття. В даній роботі не розглядається такий підхід, оскільки він вимагає більш досконалого чисельного моделювання, що виходить за рамки даної роботи. Загалом, вже 20-50 член послідовності слабко відрізняється від фундаментального розв’язку.

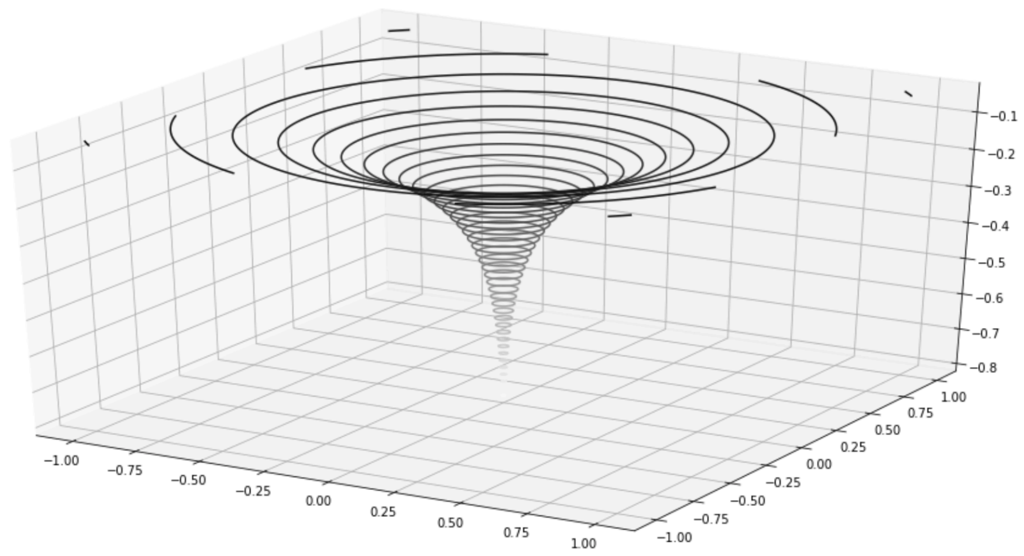


Рисунок 3.6 — Справжній розв’язок

3.5 Алгоритм пошуку за довільної правої частини

Оскільки відомим є результат, що розв’язок лінійного рівняння може бути отриманий згорткою правої частини із фундаментальним розв’язком.

В результаті можна сформувати загальний алгоритм пощуку фундаментальнаго та взагалі узагальненого розв’язку лінійного диференціального рівняння. У другому розділі було зазначено, що довільна узагальнена функція може бути представлена класом еквівалентності послідовності многочленів. Це наводить на міркування, що за вибору достатньо великого номеру послідовності, можна виконати чисельний розв’язок, і, отримавши послідовність значень розв’язку, виконати рівномірну апроксимацію многочленами, наприклад, Чебишова. При виконанні згортки із таким наближенням, можна отримати достатньо гарне наближення точного розв’язку.

Нехай $p_n(t)$ — відповідне рівномірне наближення многочленом Чебишова на відрізку $[a, b]$, на якому шукається розв’язок рівняння, а y_f — точний фундаментальний розв’язок. Нехай для простоти, y_f — звичайна функція, що диференційовна достатню кількість разів, тоді:

$$|D(y_f * f) - D(p_n * f)| = |D((y_f - p_n) * f)| = |(D(y_f - p_n)) * f|$$

Де D — лінійний диференціальний оператор.

В силу лінійності згортки та правилам її диференціювання справедливий останній перехід:

$$|\int_{-\infty}^{\infty} D(y_f - p_n)(t-\tau)f(\tau)I(\tau \in [a,b]) * I(t-\tau \in [a,b])d\tau| \le \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)| I(\tau \in [a,b])d\tau$$

Оскільки довільний клас узагальненої функції породжується послідовність многочленів, то представлення у вигляду многочленів Чебишова не суперечить розвиненій теорії. Більш того, згортка із таким наближенням фундаментального розв'язку дійсно буде прямувати до розв'язку за довільної правої частини. Спільний номер N можна підібрати в силу властивостей збіжності довільної похідної послідовності многочленів до довільної похідної фундаментального розв'язку. Отже, якщо права частина інтегровна на відповідному відрізку, то відповідне наближення дійсно має сенс.

Перевага такого підходу полягає в тому, що можна чисельно знайти фундаментальний розв'язок, а потім, шукати розв'язок за довільної правої частини шляхом чисельного явного інтегрування чи відповідного чисельного наближення.

Висновки

У третьому розділі було детально проілюстровано збіжність послідовностей розв'язків звичайних диференціальних рівнянь та дифеернціальних рівнянь в часткових похідних. При цьому використовувалися сучасні чисельні методи. Як результат було встановлено, що описані у другому розділі міркування, щодо формалізації та розв'язку узагальнених диференціальних рівнянь, дійсно мають місце бути.

Окремої уваги заслуговує швидкість збіжності: навіть за вибору невеликого номеру послідовності (порядку 10-30) можна отримати гарне наближення, що дозволяє, за необхідності використовувати його, як узагальнений розв'язок.

Отримані результати дозволяють, фактично, алгоритмізувати пошук узагальнених розв'язків шляхом зведення до задачі чисельних методів. Питання, що вибору чисельного методу є відкритим, адже за різних варіантів послідовності, що задає праву частину рівняння, різні методи можуть давати різну точність та швидкість збіжності. Так, метод Гауса-Зайделя, за допомогою якого шукалося наближення лінійної системи, що задає фундаментального розв'язок оператора Лапласа, вимагає тривалого часу роботи.

Серед переваг запропонованого підходу, передусім, варто викоремити теоретичну простоту. Для коректної роботи методу варто знати лише фундаментальну послідовність та порядок k, що задає узагальнену функцію в правій частині. Оскільки розв'язок не залежить від послідовності, що задає узагальнену функцію, можна обрату таку, що є найкращою з точки зору дослідника. Так, можна знайти такі, для якої можна явно віднайти розв'язок рівняння, чи послідовність, що задовільняє певним умовам диференційовності. Ще однією перевагою є універсальність (принаймні для лінійних рівнянь), що дозволяє шукати узагальнені розв'язки в незалежності від постановки задачі.

Існує також і ряд недоліків, що властиві розробленому методу. Перш за все, це необхідність явно інтегрувати фундаментальну послідовність функцій, що задає узагальнену функцію. Можливим варіантом є чисельне інтегрування, але це може призвести до втрати точності наближення. Ця проблема стає більш актуальною із зростанням вимірності рівняння: інтегрування стає виснажливим та вимагає кропіткої роботи.

4 ФУНКЦІОНАЛЬНО-ВАРТІСНИЙ АНАЛІЗ ОТРИМАНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

4.1 Постановка завдання

Проводиться оцінка основних характеристик теорії та отриманих результатів розв'язку узагальнених лінійних диференціальних рівнянь.Для тестування отриманих теоретичних результатів використовувалася мова програмування Python. Середовище розробки — Jupyter Lab. Робота програми не залежить від технологій реалізації апаратного забезпечення та операційної системи. Нижче наведено аналіз різних підходів до отримання відповідних результатів з метою вибору оптимального в економічному та технічному сенсі способів побудови теорії та її подальшого використання.

4.2 Обґрунтування функцій дослідження

Основні функції: F_1 — Вибір підходу до побудови узагальненої функції; F_2 — Пошук узагальнених розв'язків лінійних диференціальних рівнянь;F_3 — Експериментальна перевірка отриманих результатів;
Функція F_1: а) Функціональний; б) Секвенціальний; в) Альтернативні;
Функція F_2: а) Застосування розвинутих чисельних методів; б) Аналітичний розв'язок за відомих правих частин;
Функція F_3: а) Вибір мови програмування Python; б) Вибір мови програмування C++; в) Вибір мови програмування Java;
Знизу зображено морфологічну карту (Рис. 4.1):

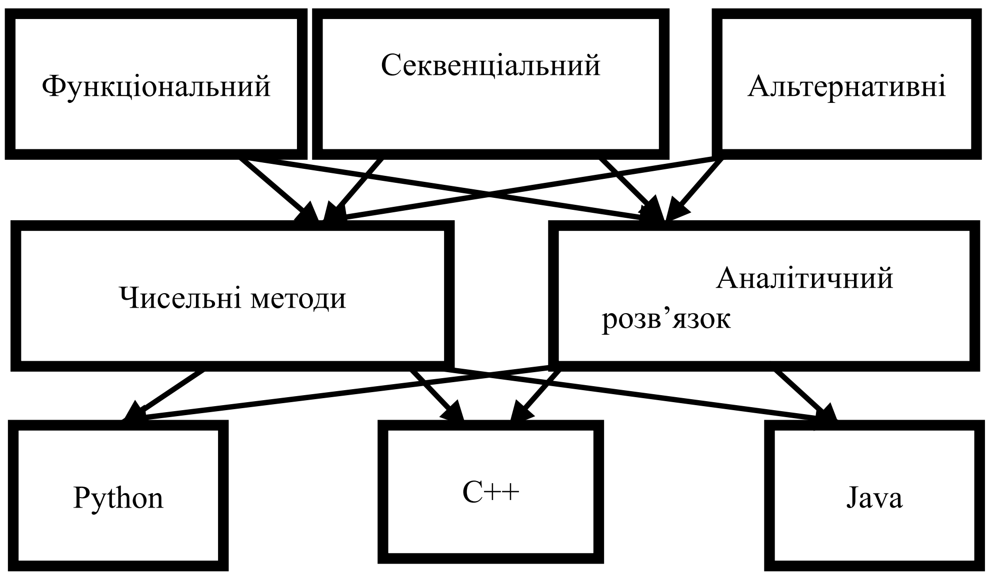


Рисунок 4.1 — Морфологічна карта

Позитивно-негативну матрицю наведемо у вигляді таблиці 4.1

Таблиця 4.1 — Позитивно-негативна матриця.

Позитивно-негативна матриця			
Основні функції	Варіанти реалізації	Переваги	Недоліки
F_1	А	Гарно розвинуте теоретичне забезпечення. Універсальність.	Вимагає складний апарат функціонального аналізу.
	Б	Не вимагає складної теорії. Проста побудова.	Менша кількість результатів. Не такий універсальний.
	В	Перспективні напрямки, де можна потенціально отримати низку нових результатів.	Вимагають складної теорії.
F_2	А	Не залежить від виду функції правої частини.	Для негладких функцій теоретичне забезпечення не таке розвинуте.
	Б	Теоретична коректність. Швидкість обчислення.	Вимагає індивідуального підходу.
F_3	А	Велика кількість бібліотек. Простіший програмний код.	Менша швидкість.
	Б	Швидкість виконання.	Складніший програмний код.
	В	Кросплатформеність.	Менша швидкість, менше модулів.

Тепер, за наявності позитивно-негативної матриці можна робити висновки щодо доцільності використання одних варіантів та недоцільності використання інших.

На основі порівняльного аналізу варіантів реалізацій основних функцій по їх перевагам та недолікам можна виключити варіанти F_1 а і в, F_2 б і в, тоді варіанти, які залишилися:

F_1б) —F_2 а) — F_3 а)

F_1б) —F_2 б) — F_3 а)

Для оцінювання описаних функцій запропонована система параметрів. Опишемо цю систему.

4.3 Обґрунтування системи параметрів досліджень

Для характеризації досліджень запропонуємо такі параметри:
X1 — Теоретична складність підходу до побудови узагальненої функції (час, необхідний на вдалий розбір та опанування необхідної теорії); X2 — Складність алгоритмізації підходу (Час розробки та написання алгоритму); X3 — Складність застосування методів розв'язку (Тривалості роботи методів, тривалість); X4 — Складність дослідження рівняння (Тривалість теоретичного дослідження); X5 — Час на освоєння мови програмування (Час на вивчення мови програмування); X6 — Просторова складність робочих модулів (Кількість пам'яті для роботи); X7 — Часова складність робочих модулів (Тривалість роботи);Гірші, середні та кращі показники параметрів вибираються на основі вимог замовника та умов перебігу дослідження, їх наведено у таблиці 4.2:

Таблиця 4.2 — основні параметри дослідження

Основні параметри дослідження				
Умовні позначення	Одиниці виміру	Значення параметрів		
		Гірші	Середні	Кращі
X1	Год.	32	24	18
X2	Год	12	6	4
X3	Год.	20	10	6
X4	Год.	48	12	4
X5	Год.	12	8	4
X6	Мб.	64	32	16
X7	Мс.	5000	2000	1500

Графічні характеристики описаних вище параметрів (Рис. 4.2 — 4.8) з урахуванням значень таблиці 4.2:

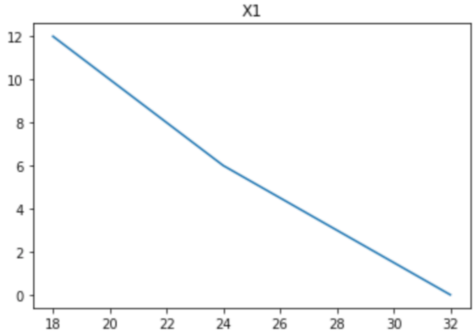


Рисунок 4.2 — X1

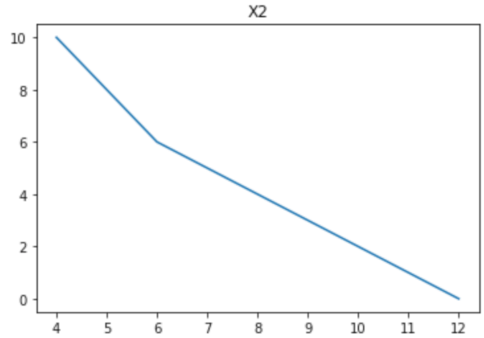


Рисунок 4.3 — X2

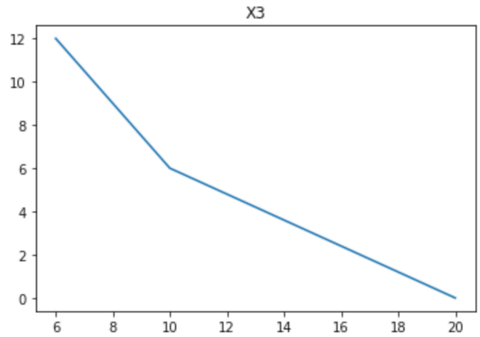


Рисунок 4.4 — X3

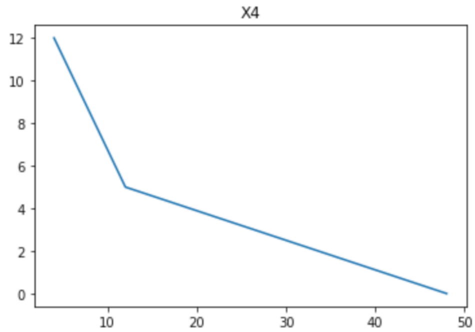


Рисунок 4.5 — X4

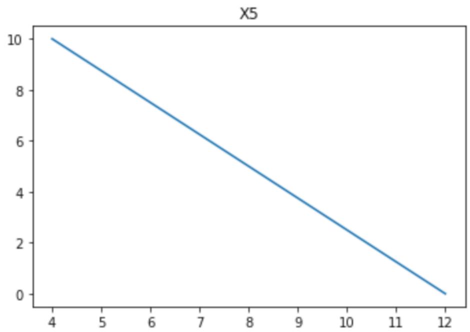


Рисунок 4.6 — X5

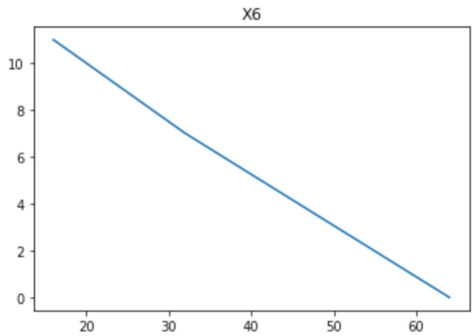


Рисунок 4.7 — X6

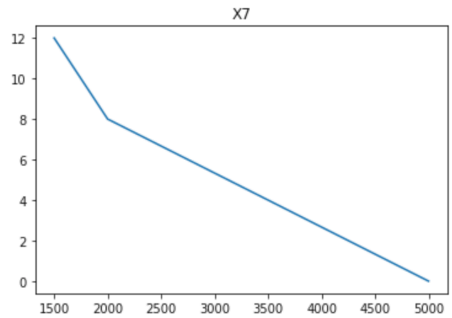


Рисунок 4.8 — X7

Вагомість параметрів визначається методом попарного їх порівняння на основі результатів ранжування експертами та попарного порівняння параметрів. Наведемо результати експертного ранжування (таблиця 4.3):

$$W\frac{12S}{N^2(n^3-n)} = \frac{12*1038}{49*(343-7)} \approx 0.757 > 0.67$$

Отже, ранжування достовірне, виходячи із даної нерівності. Результати ранжування наведено у таблиці 4.3, а попарне порівняння результатів у таблиці 4.4

Таблиця 4.3 — результати експертного ражування параметрів.

Результати ранжування параметрів											
Умовне позначення	Одиниці виміру	Ранг параметра за оцінкою експерта							Сума рангів R_i	Відхилення Δ_i	Δ_i^2
		1	2	3	4	5	6	7			
X1	Год.	5	4	4	6	6	5	5	35	7	49
X2	Год	1	2	1	2	1	2	1	10	-18	324
X3	Год.	3	1	2	1	3	1	3	14	-14	196
X4	Год.	2	3	3	3	2	4	2	19	-9	81
X5	Год.	7	7	7	7	5	3	4	38	10	100
X6	Мб.	4	6	6	4	4	7	6	40	12	144
X7	Мс.	6	4	5	5	7	6	7	40	12	144
Разом		28	28	28	28	28	28	28	196	0	1038

Таблиця 4.4 — Результати попарного порівняння параметрів на основі табл. 4.3.

Попарне порівняння параметрів									
Параметри	Експерти							Кінцева оцінка	Числове значення
	1	2	3	4	5	6	7		
X1 та X2	<	>	<	<	<	<	>	<	0.5
X1 та X3	<	>	<	<	<	>	<	<	0.5
X1 та X4	<	<	<	<	<	<	<	<	0.5
X1 та X5	<	>	>	>	<	>	>	>	1.5
X1 та X6	<	>	<	<	>	<	>	<	0.5
X1 та X7	<	>	>	<	<	>	>	>	1.5
X2 та X3	>	<	>	>	>	>	<	>	1.5
X2 та X4	>	<	<	>	>	>	<	>	1.5

Попарне порівняння параметрів									
X2 та X5	>	>	>	>	<	>	>	>	1.5
X2 та X6	<	>	>	<	<	>	<	<	0.5
X2 та X7	<	>	>	<	>	>	>	>	1.5
X3 та X4	>	<	<	>	<	<	>	<	0.5
X3 та X5	>	>	>	<	>	>	<	>	1.5
X3 та X6	<	>	>	<	<	<	<	<	0.5
X3 та X7	<	>	<	<	<	>	>	<	0.5
X4 та X5	<	>	>	<	<	>	>	>	1.5
X4 та X6	<	>	>	<	<	<	<	<	0.5
X4 та X7	<	>	<	<	>	<	<	<	0.5
X5 та X6	<	<	<	<	<	>	<	<	0.5
X5 та X7	<	>	<	<	<	>	>	<	0.5
X6 та X7	<	<	<	<	<	<	>	<	0.5

4.4 Аналіз рівня якості варіантів реалізації функцій

Розрахунок вагомості занотуємо у таблицю 4.5, тоді можна провести аналіз прийнятності варіантів реалізації.

Таблиця 4.5 — Результати рохрахунку вагомості параметрів.

Розрахунок вагомості параметрів													
Xi	Xj							Перша ітерація		Друга ітерація		Третя ітерація	
								b_i^1	K_i^1	b_i^2	K_i^2	b_i^3	K_i^3
X1	1	0.5	0.5	0.5	1.5	0.5	1.5	6	0.117	38	0.123	243.5	0.124
X2	1.5	1	1.5	1.5	1.5	0.5	1.5	9	0.188	58.5	0.19	372.25	0.189
X3	1.5	0.5	1	0.5	1.5	0.5	0.5	6	0.125	37	0.12	236.5	0.12
X4	1.5	0.5	1.5	1	1.5	0.5	0.5	7	0.146	43.5	0.141	276.75	0.141
X5	0.5	0.5	0.5	0.5	1	0.5	0.5	4	0.083	26	0.084	167.	0.085
X6	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1	0.5	9	0.188	60.5	0.196	387.25	0.197

Розрахунок вагомості параметрів													
X6	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1	0.5	9	0.188	60.5	0.196	387.25	0.197
X7	0.5	0.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1	7	0.146	44.5	0.144	282.75	0.144

$$K_1 = 1.488 + 1.134 + 1.44 + 1.692 + 0.425 + 0.985 + 1.152 = 6.828$$

$$K_2 = 1.488 + 1.134 + 1.44 + 0.705 + 0.425 + 0.985 + 1.152 = 5.841$$

Отже, перший варіант, відповідно до таблиць 4.4 та 4.5, що передбачає чисельне моделювання дає більший результат. Тому віддаємо йому перевагу.

4.5 Економічний аналіз варіантів розробки ПП

Обидва варіанти включають в себе три окремих етапи:
1. Розробка теоретичної бази;
2. Розробка алгоритмічної бази та методів розв’язку;
3. Розробка програмного продукту;

Для завдання 1 (алгоритм групи складності 3, ступінь новизни А, вид використаної інформації — НДІ) T_P =27 людино-днів, $K_П$ =1.26 для НДІ, $K_{СК}$ = 1, $K_{СТ.М}$ =1.

$$T_1 = 27 * 1.26 * 1.6 = 54.432 \text{ людино-днів}$$

Для завдання 2 (при реалізації варіанту 1)), (алгоритм групи складності 3, ступінь новизни В, вид використаної інформації — НДІ) T_P =12, $K_П$ =1.26 для НДІ, $K_{СК}$ = 1, $K_{СТ.М}$ =1.

$$T_2^1 = 12 * 1.26 = 15.12 \text{ людино-днів}$$

Для другого завдання (при реалізації варіанту 2)), (алгоритм групи складності 1, ступінь новизни А, вид використаної інформації — НДІ) T_P =27, $K_П$ =1.26 для НДІ, $K_{СК}$ = 1, $K_{СТ.М}$ =1.6.

$$T_2^2 = 27 * 1.26 * 1.6 = 54.432 \text{ людино-днів}$$

Для завдання 3 (алгоритм групи складності 1, ступінь новизни А, вид використаної інформації НДІ) T_P =90 людино-днів, $K_П$ =1.7, $K_{СК}$ = 1, $K_{СТ}$ = 0.7, $K_М$ = 1.

$$T_3 = 90 * 1.7 * 0.7 = 107.1 \text{ людино-днів}$$

Загальна кількість людино-днів:

$$T_1 = (54.432 + 15.12 + 107.1) * 8 = 1413.216 \text{ людино-днів}$$

$$T_2 = (54.432 + 54.432 + 107.1) * 8 = 1727.712 \text{ людино-днів}$$

В розробці та проведенні дослідження приймають участь 2 програмісти з окладом 12 000 грн та один математик-теоретик з окладом 10 000.

Зарплата розробників становить погодинно:

$$C = \frac{12000 + 12000 + 10000}{3 * 21 * 8} = 67.46 \text{ грн.}$$

Зарплата поваріантно:

$$C_1 = 67.46 * 1413.216 * 1.2 = 114403 \text{ грн.}$$

$$C_2 = 67.46 * 1727.712 * 1.2 = 139862 \text{ грн.}$$

Відрахування на соціальний внесок становить 22%:

$$C_1^v = 0.22 * 114403 = 25169 \text{ грн}$$

$$C_2^v = 0.22 * 139862 = 30770 \text{ грн.}$$

Визначаємо витрати на оплату однієї машино-години. З урахуванням заробітної плати програміста в розмірі 12000 грн з коефіцієнтом зайнятості 0.2, маємо:

$$С_Г = 12*М*К_З = 12 *12000* 0,2 = 28800 \text{ грн.}$$

З урахуванням додаткової заробітної плати:

$$С_{ЗП} = С_Г * (1+ К_З) = 28800 * (1 + 0.2)=34560 \text{ грн.}$$

Відрахування на соціальний внесок:

$$С_{ВІД} = С_{ЗП} * 0.22 = 34560 * 0,22 = 7603 \text{ грн.}$$

Амортизаційні відрахування розраховуємо при амортизації 25% та вартості ЕОМ – 8000 грн.

$$С_А = К_{ТМ} * К_А * Ц_{ПР} = 1.15 * 0.25 * 8000 = 2300 \text{ грн.},$$

Витрати на ремонт та профілактику можна підрахувати:

$$C_P = K_{TM*}Ц_{ПР} * K_P = 1.15 * 8000 * 0.05 = 460 \text{ грн.},$$

Ефективний годинний фонд часу ПК за рік розраховуємо за формулою:

$$T_{ЕФ} =(Д_К – Д_В – Д_С – Д_Р) * t_{З*}K_В = (365 – 104 – 11 – 16) * 8 * 0.9 = 1684.8 \text{ годин}$$

Тепер рахуємо витрати на оплату електроенергії (з урахуванням ПДВ):

$$C_{ЕЛ} = T_{ЕФ*} N_{C*} K_{З*} Ц_{ЕН} =1684.8 * 0,3*1,46255 * 2 * 1.75 = 2586.79 \text{ грн.},$$

Накладні витрати рахуються наступним чином:

$$C_Н = Ц_{ПР*}0.67 = 8000\cdot 0,67 =5360 \text{ грн.}$$

Річні експлуатаційні витрати:

$$C_{ЕКС} = 34560 + 7603 + 2300 + 460 + 2586.79 + 5360 = 52869.79 \text{ грн.}$$

Собівартість однієї машино-години ЕОМ становитиме:

$$C_{М-Г} = C_{ЕКС}/ T_{ЕФ} = 52057.16/1684.8 = 30.9 \text{ грн/год}$$

Витрати на оплату машинного часу складають в залежності від варіанту:

$$C_M^1 = 30.9 * 1413.216 = 43668.4 \text{ грн}$$

$$.C_M^2 = 30.9 * 1727.712 = 53386.3 \text{ грн.}$$

Накладні витрати складають 67% від заробітної плати:

$$C_H^1 = 0.67 * 114403 = 76650 \text{ грн.}$$

$$C_H^2 = 0.67 * 139862 = 93707.54 \text{ грн.}$$

Таким чином, вартість розробки ПП та проведення дослідів складає:

$$C_1 = 114403 + 25168 + 43668.4 + 76649.34= 259888.74 \text{ грн.}$$

$$C_2 = 139862+ 30769 + 53386.3 + 93707.54= 317724.84 \text{ грн.}$$

Проведемо розрахунок техніко-економічного рівня:

$$K_{TEP1} = 6.828 / 259887.74 = 26.27 \cdot 10^{-5},$$

$$K_{TEP2} = 5.841 / 317724.84 = 18.38 \cdot 10^{-5}.$$

Отже, найбільш ефективним є перший варіант з коефіцієнтом техніко-економічного рівня $26.27 \cdot 10^{-5}$.

За результатами проведеного функціонально-вартісного аналізу, можна зробити висновок, що з альтернатив, що залишилися після відбору, було отримано два варіанти.

Таким чином, після першого відбору було отримано два варіанти, в результаті проведення функціонально-вартісного аналізу стало зрозуміло, що доцільним є використання першого варіанту реалізації продукту. Першому варіанту відповідає використання мови Python, секвенціального підходу до побудови узагальненої функції і застосування розвинених чисельних методів до дослідження.

ВИСНОВКИ

В результаті виконання дипломної роботи та дипломного дослідження було виконано змістовну побудову поняття узагальненої функції із використанням секвенціального підходу. В подальшому було проведено детальне порівняння цього підходу із набільш поширеним сьогодні — функціональним. Це порівняння дозволило виокремити сильні та слабкі сторони обох варіантів побудови, зрозуміти область їх використання. В результаті було конструктивно доведено еквівалентність двох підходів. Цей результат дозволяє гнучко використовувати обидва з них та віповідну їм нотацію без втрати загальності.

Головним досягненням дипломної роботи можна вважати коректно запроваджене поняття узагальненого диференціального рівняння в сенсі секвенціального підходу. Було отримано багато результатів, серед яких ,передусім, коректність роз’язку (незалежність від вибору фундаментальної послідовності) та власне процедура пошуку. Така побудова виявилася корисною в тому розумінні, що є більш простою та дозволяє алгоритмізацію пошуку узагальнених розв’язків. Так, автор навів низку чисельних прикладів пошуку фундаментальних розв’язків лінійних диференціальних операторів із сталими та несталими коефіцієнтами, із частинними похідними та звичайних.

Отриманий метод виявився ефектним інструментом, дієвість якого може бути підтверджена чисельними прикладами, розробленими автором, що імплементував для цього відомі чисельні методи. Новизною даної роботи є винайдення простого, ефективного та унівесрального алгоритму розв’язку узагальнених лінійних диференціальних рівнянь. Він може бути використаний на противагу відомому методу, наприклад, відомому методу параметрикса.

Алгоритм пошуку узагальненого розв’язку може стати важливим кроков для розвинення теорії секвенціального підходу, а також для впровадження та побудови ефективних чисельних методів розв’язку узагальнених диференціальних рівнянь. Це підтверджує перспективність подальших розробок в даному напрямі. Автор також планує розвивати побудований алгоритм із метою написання статті.

РЕКОМЕДАЦІЇ

Оскільки сьогодні важливим є автоматизація методів математичного моделювання, важливим є впровадження та алгоритмізація основних засобів математичної фізики, до яких входить поняття узагальненої функцій.

Подальші дослідження полягають у більш ретельній розробці методу у випадку рівнянь старшого порядку. Важливим є також можливий пошук оцінки точності рішення, в залежності від обраної послідовності, що задає праву частину. Нарешті, є потреба в глибшому дослідженні секвенціального підходу, як потеціального джерела алгоритмів обробки та представлення узагальнених функцій.

Отримані в процесі дослідження та розробки результати, можуть бути впроваджені для чисельного пошуку фундаментального розв'язку лінійних диференціальних рівнянь у галузях математичної фізики та теорії диференціальних рівнянь. Як результат, можливим стає пошук чисельного наближення функції Гріна, що дозволяє повністю описати систему. Отже, метод може знайти застосування у математичному моделюванні на основі диферецiальних рівнянь.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. 4-е издание. Москва: Наука, 1981. 512 с.

2. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического управления. 4-е изд., перераб. и доп. Санкт-Петербург: Профессия, 2003. 752 с.

3. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физики. Москва: Наука, 1979. 320 с.

4. Antosik P., Kaminski A. Functions and Convergence Memorial Volume for Professor Jan Mikusinski / Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences. Katowice: World Scientific, 1990. 396 p.

5. Sebastiao J. S. Sur l'axiomatique des distributions et ses possibles modèles. *I.N.I.C*. 1982. Vol. 3, No. 2. P. 183–198.

6. Bremermann H. J. Distributions, Complex Variables, and Fourier Transforms. 1st ed. New Jersey: Addison-Wesley, 1965. 186 p.

7. Егоров Ю. В. К теории обобщенных функций. *Успехи математических наук*. 1990. Вып. 5 (275). С. 19–31. URL: http://mi.mathnet.ru/umn4781.

8. Colombeau J. F. Nonlinear Generalized Functions: their origin, some developments and recent advances. *Sao Paolo Journal of Mathematical Sciences*. 2013. Vol. 7, No. 2. P. 201–239.

9. Colombeau J. F. Elementary Introduction to New Generalized Functions. Amsterdam: North-Holland Publishing, 1985. 280 p.

10. Caputo M., Fabrizio M. New definition of fractional derivative without singular kernel: *Natural Sciences Publishing*. 2015. Vol. 2, No. 1. P. 73–85.

11. Свешников А. Г., Бголюбов А. Н., Кравцов В. В. Лекции по математической физике. Москва: Наука, 2004. 352 с.

12. Baker G., Freie. A. Nonlinear Partial Differential Equations in Geometry and Physics / University of Tennessee. Tennessee: Springer Basel AG, 1997. 150 p.

13. Li C. K., Li C. P. Remarks of fractional derivatives of distributions. *Tbilisi Mathematical Journal*. 2017. Vol. 10, No 1. P. 1–18.

14. Li C. K. The powers of the Dirac delta function by Caputo fractional derivatives. *Journal Fractional calculus application*. 2016. Vol. 7, No. 1. P. 12–23. URL: https://people.brandonu.ca/lic/files/2015/11/Li_2016.pdf.

15. Абанин А. В. Ультрадифференциируемые функции и ультрараспределения. Москва: Наука, 2007. 222 с.

16. Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р. Теория обобщенных функций: секвенциальный подход. Москва: Мир, 1976. 311 с.

17. Lojasiewicz S. Sur la valeur d'une distribution dans un point. *Studia Math*. 1957. Vol 2, No. 16. P. 1–36.

18. Temple G. The theory of Generalized functions. *Royal Society*. 1955. Vol. 228. P. 175–190.

19. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. Москва: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. 636 с.

ДОДАТОК А

Програмний код для виконання тестових прикладів

```
def get_convolution(first, second):
    value = 0
    step = 1. / len(first)
    for i in range(len(first)):
        value += step * (first[i] * second[- 1 - i])
    return value

def get_derivative(ys, time):
     derivative = [(ys[i + 1] - ys[i - 1]) / (2 * (time[i] - time[i - 1])) for i in range(1, len(ys) - 1)]
    return derivative


def plot_approximations(derivatives, real):
    for i in range(len(derivatives)):
        error = derivatives[i][1] - real
        #print(derivatives[i][1][-50:])
        print(f"{i + 1} function error = {np.linalg.norm(error, np.inf)}")
        plt.plot(derivatives[i][0], derivatives[i][1])

    plt.plot(derivatives[i][0], real)


def cube(t, n):
    if t <= -1. / n:
        return 0
    elif -1. / n < t <= 0:
        return (n ** 2 * t ** 3 / 6) + (n * t ** 2) / 2 + t / 2 + (1. / (6 * n))
    elif 0 < t <= 1. / n:
        return -(n ** 2 * t ** 3 / 6) + (n * t ** 2) / 2 + t / 2 + (1. / (6 * n))
    else:
        return t

def get_func(func):
    return func
```

```
def form_fundamental_equation(delta_seq):

    def function(z, t, n):
        dx_dt = z[1]
        dy_dt = -z[0] + delta_seq(t, n)
        return [dx_dt, dy_dt]

    return function


def delta_like_1(t, n):
    return horrible_cube(t, n)


def delta_like_2(t, n):
    return np.log(1 + np.exp(n * t)) / n


def delta_like_3(t, n):
    return (0.5) ** n * ((t * np.arctan(t / (0.5) ** n)) / (0.5 ** n) - np.log(t ** 2 + 0.5 **
2) / 2) / np.pi + t / 2

def crazy_like(t, n):
    return t / 2 + (t * np.arctan(n * t)) / np.pi + np.arctan(n * t) / (2 * np.pi * n)

def bumps(t, n, k=10):
    aggregated = crazy_like(t, n)
    for i in range(1, k + 1):
        aggregated += 2 * (crazy_like(t - np.pi * i, n)) * (-1) ** i
     return (aggregated - (crazy_like(t - np.pi * (k + 1), n))) * np.heaviside(-t + np.pi *
(k + 1), 0)

def solve_equation(deltas, number):
    fundamentals = []

    for delta_sequence in deltas:
        fundamentals.append(Model(form_fundamental_equation(delta_sequence)))
        fundamentals[-1].build((number,), (0, 0), np.linspace(0, 20, 100000))
        data = fundamentals[-1].get_data(0)
```

```
        #get_convolution(data['t'], data['X(t)'])
        #plt.plot(data['t'], data['X(t)'])

    return fundamentals


def extract_data(solutions):
    data = []

    for solution in solutions:
        cols = solution.get_data(0)
        data.append((np.array(cols['t']), np.array(cols['X(t)'])))

    return data


def get_derivatives(data):
    derivatives = []

    for pair in data:
        derivatives.append((pair[0][1: -1], get_derivative(pair[1], pair[0])))

    return derivatives

derivative_1 = get_derivative(get_derivative(ys_1, time), time)
derivative_2 = get_derivative(get_derivative(ys_2, time), time)
#real = -0.5 * np.exp(time[2: -2]) + 1. / 6 * np.exp(-time[2: -2]) + 1. / 3 * np.exp(2 *
time[2: -2])
real = time[2: -2] * np.exp(-time[2: -2]) * np.heaviside(time[2: -2], 0)
error_1 = derivative_1 - real
error_2 = derivative_2 - real
print(f"first error = {np.linalg.norm(error_1, np.inf)}")
print(f"second error = {np.linalg.norm(error_2, np.inf)}")
#ax = plt.subplots(2)
#ax[1][0].plot(time[2: -2], derivative_1, time[2: -2], real)
plt.plot(time[2: -2], derivative_2, time[2: -2], real)
#plt.legend(['U1``', 'U2``', "Фундаментальний розв'язок"])

import scipy.sparse as scp
```

```
#def grid_func(i, j):
#    return

def numerical_mixed_derivative(f, constraints_vars, prec):
    x_lims, y_lims = constraints_vars
    x_num, y_num = f.shape
    x, dx = np.linspace(x_lims[0], x_lims[1], prec, retstep=True)
    y, dy = np.linspace(y_lims[0], y_lims[1], prec, retstep=True)

    d_mixed = np.array([
        [
            (f[i + 1, j + 1] + f[i - 1, j - 1] - f[i - 1, j + 1] - f[i + 1, j - 1]) / (4 * dx ** 2) for j
in range(1, y_num - 1)
        ] for i in range(1, x_num - 1)
    ])
    return d_mixed

def delta_right_side(x, y, k = 5):
    return 1. / 4. * k ** 2 if max(abs(x), abs(y)) < 1. / k else 0

def d_right_side(x, y, k = 5):
    return 0 if (x < -1. / k or y < -1. / k) else (x + 1. / k) * (y + 1. / k)\
            if max(abs(x), abs(y)) < 1. / k else (x + 1. / k) * (2. / k)\
            if (abs(x) < 1. / k and y > 1. / k) else (y + 1. / k) * (2. / k)\
            if (abs(y) < 1. / k and x > 1. / k) else 1

def right_side(x, y, k = 5):
     return 0 if (x < -1. / k or y < -1. / k) else  ((x ** 2) / 2 + x / k + 1. / (2 * k ** 2) ) *
((y ** 2) / 2 + y / k + 1. / (2 * k ** 2) ) \
           if max(abs(x), abs(y)) <= 1. / k else  (2 * x / (k)) * ((y ** 2) / 2 + y / k + 1. / (2
* k ** 2) )\
            if (y > 1. / k and abs(x) <= 1. / k) else (2 * y / (k)) * ((x ** 2) / 2 + x / k + 1. /
(2 * k ** 2) )\
             if (x > 1. / k and abs(y) <= 1. / k) else -4. / (k ** 4) + (4 * x) / (k ** 3) + (4 *
y) / (k ** 3) + (x - 1. / k) * (y - 1. / k)\
           if x > 1. / k and y > 1. / k else 0

def boundary_condition(x, y, n = 20):
    return 0
from copy import deepcopy
```

```
# error = (4. / 49) * (rightpart(x[i], y[j]) * dx ** 4 - func_vals[i + 2, j] + 4 * func_vals[i + 1, j] + 4 * func_vals[i - 1, j] - func_vals[i - 2, j] -
#                                  - func_vals[i, j + 2] + 4 * func_vals[i, j + 1] + 4 * func_vals[i, j - 1] - func_vals[i, j - 2] -
#                          0.125 * func_vals[i + 2, j + 2] + 0.25 * func_vals[i, j + 2] - 0.125 * func_vals[i - 2, j + 2] +
#                        0.25 * func_vals[i + 2, j] + 0.25 * func_vals[i - 2, j] - 0.125 * func_vals[i + 2, j - 2] +
#                       0.25 * func_vals[i, j - 2] - 0.125 * func_vals[i - 2, j - 2])
def jacobi(constraints_vars, boundary, rightpart, prec=3, epsilon=1e-4):
    #now trying to update on the go
    x_lims, y_lims = constraints_vars
    x, dx = np.linspace(x_lims[0], x_lims[1], prec, retstep=True)
    y, dy = np.linspace(y_lims[0], y_lims[1], prec, retstep=True)

    func_vals = np.array([
        [boundary(x[0], y[i])  if j == 0 and i < prec else
         boundary(x[-1], y[i]) if j == prec and i < prec else
         boundary(x[j], y[-1]) if i == 0 and j < prec else
         boundary(x[j], y[0]) if i == prec and j < prec else
         np.random.normal(0, 0.0001) if (0 < i < prec) and (0 < j < prec) else
         0
         for j in range(prec + 1)
        ]
    for i in range(prec + 1)])

    func_vals_new = deepcopy(func_vals)
    residual = 3
    alpha = 0.9

    while residual > epsilon:
        for i in range(1, prec):
            for j in range(1, prec):
                #error = (1 / (4 - dx ** 2 ) ) * ((func_vals[i + 1, j] + func_vals[i - 1, j])
                #                  + (func_vals[i, j + 1] + func_vals[i, j - 1])
                #                       - 4 * func_vals[i, j] - rightpart(x[i], y[j]) * dx ** 2)

                error = 0.25 * ((func_vals[i + 1, j] + func_vals[i - 1, j])
                                 + (func_vals[i, j + 1] + func_vals[i, j - 1])
                                      - 4 * func_vals[i, j] - rightpart(x[i], y[j]) * dx ** 2)
```

```
            #error = 0.25 * ((func_vals[i + 1, j] + func_vals[i - 1, j])
            #                   + (func_vals[i, j + 1] + func_vals[i, j - 1]) -
            #           (func_vals[i + 1, j + 1] + func_vals[i - 1, j - 1]
            #            - func_vals[i - 1, j + 1] - func_vals[i + 1, j - 1]) / 4
            #                           - 4 * func_vals[i, j] - rightpart(x[i], y[j]) * dx ** 2)

            func_vals_new[i, j] += alpha * error
            #print(error)
        residual = min(residual, np.linalg.norm(func_vals - func_vals_new, np.inf))
        print(np.linalg.norm(func_vals - func_vals_new, np.inf))
        func_vals = deepcopy(func_vals_new)

    return func_vals_new

values = jacobi(((-1, 1), (-1, 1)), boundary_condition, d_right_side, prec=200,
epsilon=0.001)

from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

def plot_result(constraints_vars, funcs_values, prec):

    x_lims, y_lims = constraints_vars
    x_indexes = np.linspace(50, prec - 50, prec, dtype=np.int32)
    y_indexes = np.linspace(50, prec - 50, prec, dtype=np.int32)
    X, Y = np.meshgrid(x_indexes, y_indexes)

    def func(x, y):
        return funcs_values[x, y]

    z = funcs_values[x_indexes, y_indexes]
    Z = func(X, Y)
    fig = plt.figure()
    ax = plt.axes(projection='3d')

    ax.scatter(x_indexes, y_indexes, z, cmap='Greens')
    ax.contour3D(X, Y, Z, 50, cmap='binary')
    #ax.contour3D(X, Y, Z_ln, 50, cmap='binary')
    plt.show()
```

```
plot_result(((-1, 1), (-1, 1)), values, 200)
```

ДОДАТОК Б

Програмний модуль для роботи із послідовностями

```
from sympy.abc import x, n, k, a, b
from sympy import lambdify, Sum, factorial, Poly, diff, integrate, Piecewise, And
from sympy import ln, exp, atan, sin, asin, acos, cos, pi
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import use
import NinjaTurtles
import math

def intersect_intervals(interval1, interval2):
   if not(interval1[0] > interval2[1] or interval1[1] < interval2[0]):
            interval = (max(interval1[0], interval2[0]), min(interval2[1], interval1[1]), 
interval1[2])
      return  interval
   else:
      return None

use('TkAgg')

def get_derivative(ys, time):
     derivative = [(ys[i + 1] - ys[i - 1]) / (2 * (time[i] - time[i - 1])) for i in range(1, 
len(ys) - 1)]
   return derivative

class ChebyshevApproximator(object):
   _func = None
   args = None
   _order = 0
   p = None
   polynomial = None

   @staticmethod
   def chebyshev(n, x):
      return np.cos(n * np.arccos(x))
```

```
    @classmethod
    def set_interval(cls, interval):
        cls.args = np.arange(interval[0], interval[1], interval[2])

    @property
    def func(self):
        return _func

    @property
    def order(self):
        return _order

    @classmethod
    @func.setter
    def func(cls, func):
        cls._func = func
        return cls

    @classmethod
    @order.setter
    def order(cls, order):
        cls._order = order
        return cls

    @classmethod
    def form_coefficients(cls, values):
        print(len(values))
        print(len(cls.args))
        vals = np.array([cls.func(arg) for arg in cls.args]) if cls._func else values
        cls.p = np.polynomial.Chebyshev.fit(cls.args, vals, cls.order)
        return cls

    @classmethod
    def as_seq(cls):
            polynomial = sum(cls.p.coef[i] * cos(i * acos(2 * (x - cls.args[0]) * round(1 /
(cls.args[-1] - cls.args[0]), 5) - 1 )) \
                    for i in range(cls.order + 1))
        cls.polynomial = polynomial
        return polynomial
```

```
class DifferentialEquation(object):

    def __init__(self, coefficients):
        self.coefficients = coefficients
        self._initial_conditions = None
        self.t = None
        self._right_sequence = None
        self.numbers = None

    @property
    def right_sequence(self):
        return self._right_sequence

    @right_sequence.setter
    def right_sequence(self, sequence):
        self._right_sequence = sequence

    @property
    def initial_conditions(self):
        return self._initial_conditions

    @initial_conditions.setter
    def initial_conditions(self, initial):
        self._initial_conditions = initial


    def _form_system(self):
        interval = self.right_sequence.interval
            self.t = np.linspace(interval[0], interval[1], int((interval[1] - interval[0]) /
interval[2]))
        #*([n] + coefficients)

        def system(z, t, *params):
            derivatives = []
            for eq in range(0, len(params) - 3):
                derivatives.append(z[eq + 1])

            derivatives.append(sum([self.right_sequence.element(params[0]).subs(x, t)
                        - np.array(params[-1: 1: -1]) @ np.array(z) / params[1]]))
            # derivatives.append(sum([self.right_sequence.element(params[0]).subs(x, t)
```

```
            #                   - params[-1 - i].subs(x, t) * z[-1 - i]  / params[1].subs(x,t) ] for i
in range(len(z) - 1)))
            return derivatives

        return system

    def solve(self, numbers):
        self.numbers = numbers
        self.solutions = []
        system = self._form_system()
        for number in numbers:
                    self.solutions.append(odeint(system, self._initial_conditions, self.t,
tuple([number] + self.coefficients)))
        return self.solutions

    def as_seq(self):
        ChebyshevApproximator.order = self.numbers[-1]
         ChebyshevApproximator.set_interval((self.t[0], self.t[-1] +  self.t[1] - self.t[0],
self.t[1] - self.t[0]))
                                          approximations_first =
[(ChebyshevApproximator.form_coefficients(self.solutions[i][:, 0]).as_seq(),
                            And(n <= self.numbers[i], n >= self.numbers[i]))
                           for i in range(len(self.numbers))]
         approximations_seq = approximations_first + [(approximations_first[-1][0], n >
self.numbers[-1])]

        sequence = Piecewise(*approximations_seq)
        return Sequence(sequence, (self.t[0], self.t[-1], self.t[1] - self.t[0]))



    def plot_solution(self):
        for solution in self.solutions:
            plt.plot(self.t, solution[:, 0])
            plt.show()



class Sequence(object):
```

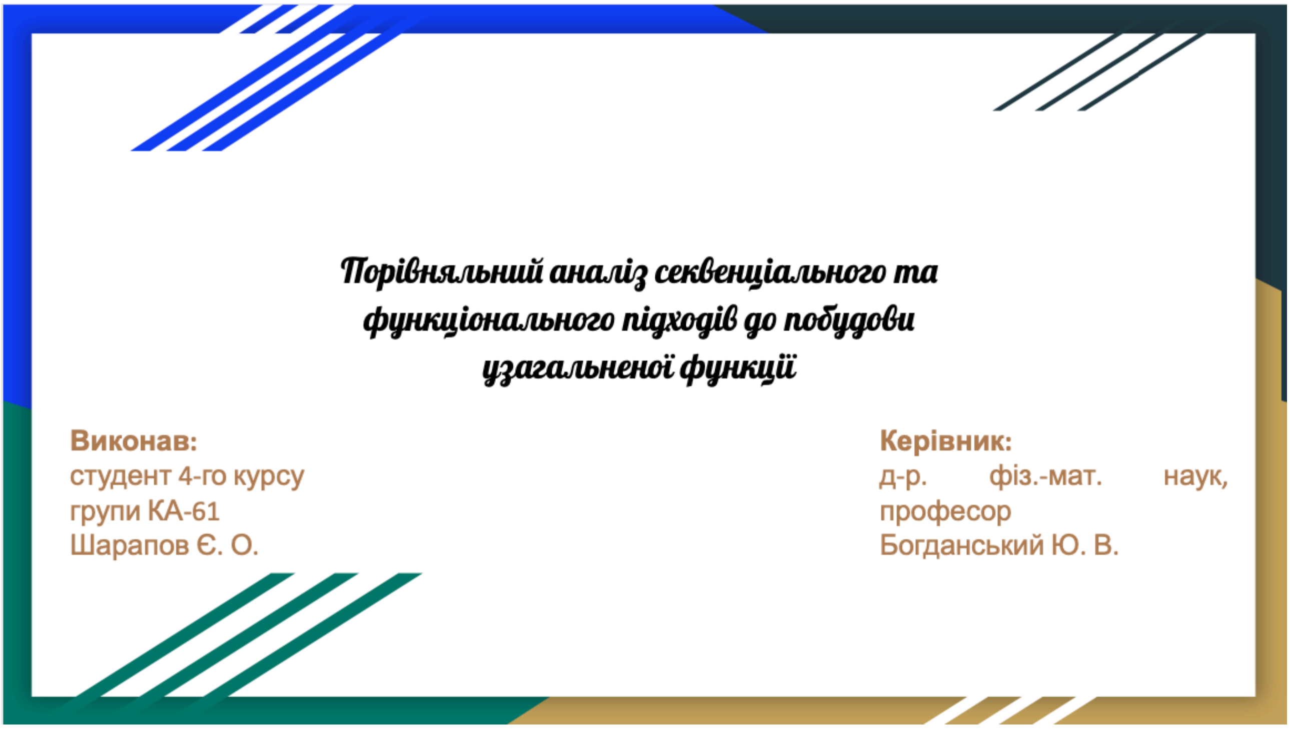
```
    settings = (-1000, 1000, 1e-3)
    def __init__(self, funcs, interval):
        self.seq = funcs
        self.args = np.arange(interval[0], interval[1] + interval[2], interval[2])
        self.limit = None
        self.polynomial_representation = None

    @property
    def interval(self):
        return (self.args[0], self.args[-1], self.args[1] - self.args[0])

    @interval.setter
    def interval(self, interval):
        self.args = np.arange(interval[0], interval[1] + interval[2], interval[2])

    def form_polynomial_representation(self, numbers):
        self.polynomial_representation = []

        for number in numbers:
            print(number)
            ChebyshevApproximator.order = number
            ChebyshevApproximator.set_interval((self.args[0], self.args[-1], (self.args[1] -
self.args[0])))
            ChebyshevApproximator.func = lambdify(x, self.element(number), 'numpy')
            ChebyshevApproximator.form_coefficients()
            polynomial = ChebyshevApproximator.as_seq()
            self.polynomial_representation.append(polynomial)

                poly_seq = Piecewise(*([(self.polynomial_representation[k], And(n <=
numbers[k], n >= numbers[k])) \
                                        for k in range(len(numbers) - 1)] +
[(self.polynomial_representation[-1], n >= numbers[-1])]))
        return Sequence(poly_seq, (self.args[0], self.args[-2], self.args[1] - self.args[0]))

    def set_settings(self, lowest, highest, rounder):
        Sequence.settings = (lowest, highest, rounder)

    def element(self, number):
        return self.seq.subs(n, number)
```

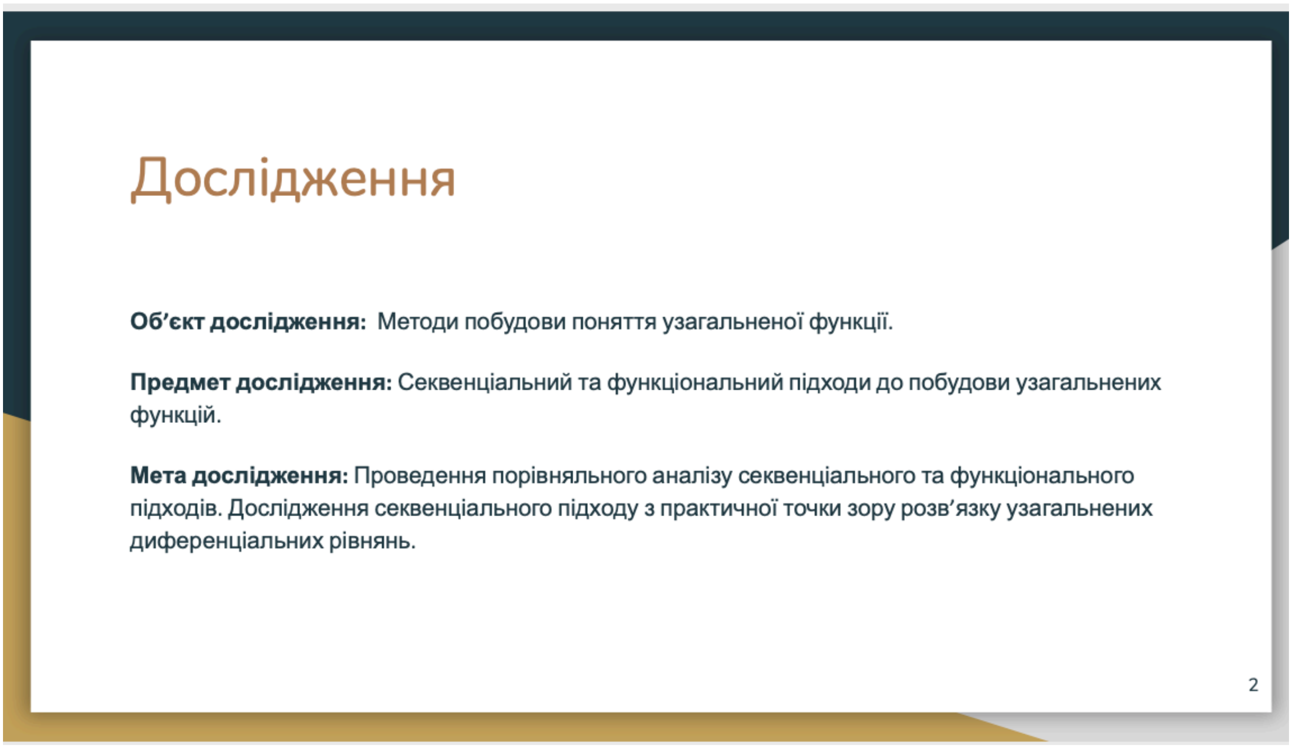
```
    def uniform_limit(self, eps, is_almost_uniform):
        N = 0
        M = 0
        rate_1 = 1
        rate_2 = 2
        previous = 1
        while True:

            N += rate_1
            M += rate_2

            member_N = self.element(N)
            member_M = self.element(M)
            member_N = lambdify(x, member_N, 'numpy')
            member_M = lambdify(x, member_M, 'numpy')

            dot_N = np.array(list(map(lambda arg: max(self.settings[0], min(member_N(arg), self.settings[1])), self.args)))
            dot_M = np.array(list(map(lambda arg: max(self.settings[0], min(member_M(arg), self.settings[1])), self.args)))

            difference = dot_M - dot_N
            divergance = np.linalg.norm(difference, np.inf)
            deviation = np.count_nonzero(abs(difference) > eps) if is_almost_uniform else 1
            print(deviation)
            if M > 5e6:
                print("no uniform limit!")
                break

            if divergance < eps or (is_almost_uniform and deviation < 10):
                self.limit = self.element(M)
                break
            else:
                print(divergance, eps)
                rate_1 *= 2
                rate_2 *= 2

    def plot(self):
        limit_lambda = lambdify(x, self.limit)
```

```
            vals = list(map(lambda arg: max(self.settings[0], min(limit_lambda(arg),
self.settings[1])), self.args))
          vals = np.array(list(map(lambda val: val if abs(val) > self.settings[2] else 0,
vals)))
        print("maximal_value " + str(max(vals)))
        plt.ylim(min(vals) - 1, max(vals) + 1)
        plt.plot(self.args, vals)
        plt.show()

    def differentiate(self, order=1, numbers=[]):
        if type(self.seq) == Piecewise:
            d_seq = Piecewise(*[(diff(self.seq.subs(n, number), *[x for i in range(order)]),
(And(n <= number, n >= number))) \
                                for number in numbers])
        else:
            d_seq = diff(self.seq, *[x for i in range(order)])
        return Sequence(d_seq, (self.args[10], self.args[-2], self.args[1] - self.args[0]))

    def integrate(self, order=1, numbers=[]):
        if type(self.seq) == Piecewise:
                    Seq = Piecewise(*[(integrate(self.seq.subs(n, number), *[x for i in
range(order)]), (And(n <= number, n >= number))) \
                                for number in numbers])
        else:
            Seq = integrate(self.seq,  *[x for i in range(order)])
            Seq += Seq.subs(x, self.args[0])

        return Sequence(Seq, (self.args[0], self.args[-2], self.args[1] - self.args[0]))

    def subtitute(self, func):
        self.seq = self.seq.subs(x, func)
        print(self.seq)

    def compare_plot(self):
        for polynomial in self.polynomial_representation:
            seq_real = lambdify(x, self.element(len(polynomial.args)), 'numpy')
            seq_approx = lambdify(x, polynomial, 'numpy')
            vals_real = np.array([seq_real(arg) for arg in self.args[: -1]])
            vals_approx = np.array([seq_approx(arg) for arg in self.args[: -1]])
            print(f"maximum_error : {np.linalg.norm(vals_real - vals_approx)}")
```

```
            plt.plot(self.args[: -1], vals_approx)
            plt.plot(self.args[: -1], vals_real)
            plt.legend(['Polynomial', 'Sequence'])
            plt.show()

    def __add__(self, other):
        sum_seq = self.seq + other.seq
        interval_sum = intersect_intervals(self.interval, other.interval)
        return Sequence(sum_seq, interval_sum)

    def __mul__(self, other):
        mul_seq = self.seq * other.seq
        interval_sum = intersect_intervals(self.interval, other.interval)
        return Sequence(mul_seq, interval_sum)

    def __sub__(self, other):
        sub_seq = self.seq - other.seq
        interval_sum = intersect_intervals(self.interval, other.interval)
        return Sequence(sub_seq, interval_sum)

    def __truediv__(self, other):
        div_seq = self.seq / other.seq
        interval_sum = intersect_intervals(self.interval, other.interval)
        return Sequence(div_seq, interval_sum)


class Distribution(Sequence):
    pass
#Task - add integration of piecewise functions#
```

ДОДАТОК В ІЛЮСТРАТИВНИЙ МАТЕРІАЛ ДЛЯ ДОПОВІДІ





Актуальність

1) Наразі поширеним є функціональний підхід до побудови узагальненої функції. Він є більш розвиненим, проте є достатньо абстрактним, що заважає його алгоритмізації. Дослідження альтернативних підходів дозволить виявити більш прикладні варіанти запровадити узагальнену функцію і ,як результат, створити відповідні чисельні методи розв'язку.
2) Розробка чисельних методів розв'язку узагальнених диференціальних рівнянь із використанням секвенціального підходу, дозволить знаходити чисельне наближення функції Гріна, фундаментальних розв'язків та, в цілому, сприятиме розвитку математичної фізики.
3) Нарешті, доведення еквівалентності двох розглянутих підходів, дозволить користуватися результатами обох теорій та, фактично, сприятиме більш активному використанню узагальнених функцій спеціалістами, що не мають часу вивчати функціональний аналіз.

3

Постановка задачі

1. Описати ретельну побудову узагальненої функції, користуючись секвенціальним підходом.
2. Провести порівняльний аналіз секвенціального та функціонального підходів до побудови узагальненої функції. Виокремити переваги та недоліки обох підходів. Вказати зв'язок між підходами.
3. Застосувати секвенціальний підход до дослідження питання збіжності послідовності розв'язків звичайних лінійних диференціальних рівнянь та систем.
4. Дослідити можливе застосування отриманих результатів до розв'язків задач математичної фізики.

4

Поняття узагальненої функції

$\delta(A) = 0$, якщо $0 \notin A$, та $\delta(A) = 1$ інакше

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)d\delta(x) = f(0)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(t)dt \int_{\mathbb{R}} cos(\omega(x-t))d\omega$$

Фурье (1807)

Дірак (1926-1927)

$$\|u\|_{W_p^k(Q)} = \left(\sum_{|\alpha|\leqslant k} \int_Q |D^\alpha u|^p dx\right)^{1/p},$$

$$W_p^s(Q) \subset C^k(\overline{Q}).$$

С. Л. Соболєв (1936)

Функціональний підхід

$$< f, \varphi > = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$$

С. Л. Соболєв - Л. Шварц (1950-ті)

Секвенціальний підхід

$$\{f_n\} \sim \{g_n\}$$

П. Антосик - Я. Мікусінський (1950-ті)

Фундаментальні послідовності та узагальнені функції

$$\{f_n(x)\} \sim \{g_n(x)\} \leftrightarrow \exists\{F_n(x)\}, \{G_n(x)\}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\} :$$

$$F_n^{(k)}(x) = f_n(x), G_n^{(k)}(x) = g_n(x), F_n \rightrightarrows \leftleftarrows G_n, x \in (a,b)$$

$$\exists\{F_n\}, F(x) \in C((A,B)), k \in \mathbb{N} \cup \{0\} :$$

$$F_n^{(k)}(x) = f_n(x), F_n(x) \rightrightarrows F(x), x \in (a,b)$$

Узагальнена функція

Фундаментальна

$$\delta(x)$$

$$\begin{cases} n - n^2|x|, & |x| \leq \frac{1}{n} \\ 0, & |x| > \frac{1}{n} \end{cases} \qquad \frac{ne^{-nx}}{(1+e^{-nx})^2}$$

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{nx^2}{2}} \qquad \frac{2n}{\pi(1+(nx)^2)} \qquad n\delta_n(nx)$$

Основні операції 1 (Регулярні)

$$\lambda[f_n(x)] + \mu[g_n(x)] = [(\lambda f + \mu g)_n(x)]$$

лінійність

$$[f_n(x)]^{(k)} = [p_n^{(k)}(x)], \quad [p_n(x)] = [f_n(x)]$$

похідна (Теорема Вейерштрасса)

$$\exists\{F_n\}, F(x) \in C((A,B)), k \in \mathbb{N} \cup \{0\}:$$

$$F_n^{(k)}(x) = f_n(x), F^{(k)}(x) = f(x), F_n(x) \rightrightarrows F(x), x \in (a,b)$$

границя

$$f_\alpha(x) : x \in (a_\alpha, b_\alpha), f(x) : x \in (a,b), f_\alpha(x) \to f(x) :$$

$$\exists\{F_\alpha\}, F(x) \in C((A,B)), k \in \mathbb{N} \cup \{0\}:$$

$$F_\alpha^{(k)}(x) = f_\alpha(x), F^{(k)}(x) = f(x), F_\alpha(x) \rightrightarrows F(x), x \in \forall(\hat{a}, \hat{b}) \subset (a,b) \subset \bigcap_\alpha (a_\alpha, b_\alpha)$$

Границя за неперервним параметром

Основні операції 2 (Регулярні)

$$\omega(x) * f(x) = [\omega(x) f_n(x)], \quad [f_n(x)] = f(x)$$

$$(\omega(x) * f(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \omega^{(k)}(x) f(x)^{(n-k)}$$

Добуток на нескінченно диференційовну

$$f(\varphi(x)) = [f_n(\varphi(x))], x \in (A_0, B_0), f(x) = [f_n(x)]$$

Монотонна нескінченно-диференційовна заміна

$$H(\varphi(x)) = \begin{cases} H(x - x_0), & \varphi'(x) > 0 \forall x \\ 1 - H(x - x_0), & \varphi'(x) < 0 \forall x \end{cases} \longrightarrow \delta(\varphi(x)) = \frac{\delta(x - x_0)}{|\varphi'(x_0)|}$$

Приклад композиції дельта функції

Схема запровадження інтеграла

$$g(x) = \lim_{\alpha \to 0} f(\alpha x + x_0) \longrightarrow \int_a^b f(x+t)dt = \psi(x+b) - \psi(x+a), \quad \psi'(x) = f(x), a, b \in (A, B)$$

Значення узагальненої функції у точці (коректно, оскільки g - константа)

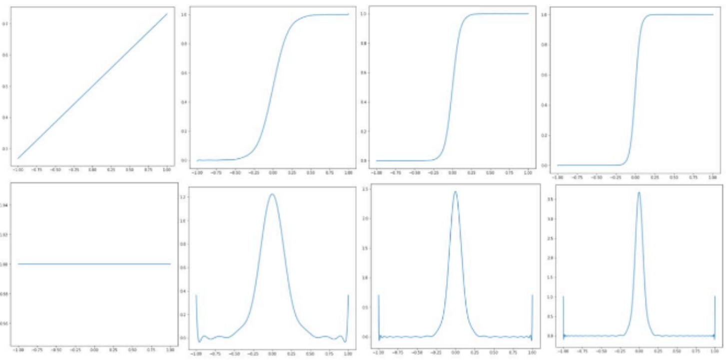
$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x+t)|_{x=0} \longrightarrow \int_a^b f(t)dt = \psi(b) - \psi(a) \longrightarrow f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n cos(nx) + b_n sin(nx))$$

(За умови існування значення на краях)

$$f(x+2\pi) = f(x)$$

застосування - розширення поняття ряду Фурьє та періодичної функції

Приклади (похідна)



0 20 40 60

Аппроксимація виконується лінійною комбінацією поліномів Чебишева

Можлива альтернатива - поліноми Бернштейна

Приклади (добуток та композиція)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{sin(x)}{1+e^{-nx}}\right) \rightrightarrows \begin{cases} cos(x), & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$f_n(x) = \begin{cases} n - n^2|x|, & |x| \leq \frac{1}{n} \\ 0, & |x| > \frac{1}{n} \end{cases}, \varphi_n(x) = x + (0.9)^n \sin(x), \ f_n(x) \to \delta(x),$$

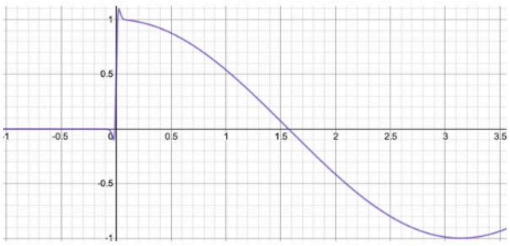


Рисунок 2.12 — графік $(f_{100}(x)\omega(x))'$

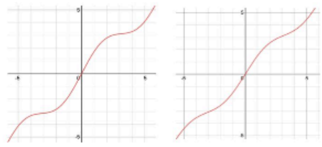


Рисунок 2.13 — $\varphi_1(x), \varphi_5(x)$, зліва

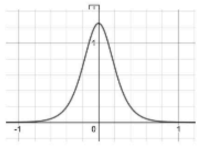


Рисунок 2.14 — $f_5(\varphi_5(x))$

Згортка

1) $\delta_n(x) = 0, |x| \geq \alpha_n, \alpha_n \to 0$

2) $\alpha_n^k \int_{\mathbb{R}} |\delta_n^{(k)}| dx \leq M_k \forall n \in \mathbb{N}$

3) $\int_{\mathbb{R}} \delta_n(x) dx = 1, \ \ \forall n \in \mathbb{N}$

Дельта-подібна послідовність, відрізняється від класичної наявністю технічної умови 2)

$$s_n = f_n * g_n, \ \ f_n = f * \delta_n, \ \ g_n = g * \delta_n, \ \ \forall \delta_n$$

Згортка існує за умови незалежності від вибору дельта-подібної послідовності

$$[g_n] = g \qquad [f_n] = f \qquad f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt$$

Нерегулярна операція (згортка фундаментальних не завжди є фундаментальною)

Диференціальні рівняння в секвенціальному сенсі

$$Lu = f \qquad \exists\{U_n\},\{F_n\},\ k \in \mathbb{N}\cup\{0\}:\ \ [Lu_n] = [f_n],\ \ u_n = U_n^{(k)}, f_n = F_n^{(k)}$$

$$\hat{L} = L\frac{d^k}{dx^k} = \frac{d^k}{dx^k}L$$

$$Lu = f \leftrightarrow$$

$$\exists\{U_n\},\{F_n\},\ k \in \mathbb{N}\cup\{0\}:\ \ [\hat{L}U_n] = [\frac{d^k}{dx^k}F_n] \longrightarrow [\hat{L}U_n] = [\frac{d^k}{dx^k}F_n] \leftrightarrow [\frac{d^k}{dx^k}(LU_n - F_n)] = 0 \longrightarrow$$

$$[LU_n - F_n] = [p_n^{s<k}] \longleftrightarrow [LU_n] = [p_n^{s<k} + F_n] \longrightarrow \begin{matrix}[LU_n^1] = [p_{s<k}],\\ [LU_n^2] = [F_n], \forall n \in \mathbb{N}\end{matrix} \longrightarrow [U_n] = [U_o + U_n^1 + U_n^2],$$

Число “к” можна збільшити за рахунок інтегрування послідовності із означення фундаментальності, таким чином - можна позбутися розв’язку-многочлена (після диференціювання)

1 Один із основних результатів роботи - означення такого диф рівняння коректне! (доведення розділ 2 підрозділ 4)

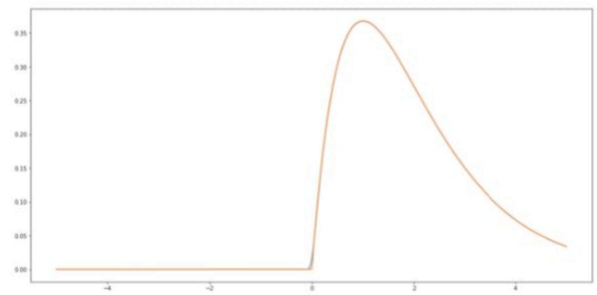
Приклад (Фунд. розв. гом. лін. диф. рівняння)

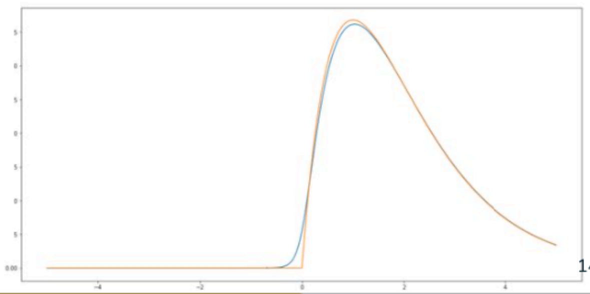
$$u'' + 2u' + u = \delta$$

$$U_n'' + 2U_n' + U_n = \frac{ln(1+e^{nx})}{n}$$

Альтернативна послідовність правих частин:

$$\begin{cases} 0, \quad x \leq \frac{-1}{n} \\ \frac{n^2x^3}{6} + \frac{nx^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{6n}, \frac{-1}{n} < x \leq 0 \\ -\frac{n^2x^3}{6} + \frac{nx^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{6n}, 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ x, \quad x > \frac{1}{n} \end{cases}$$





Приклад (Фунд розв’язок рівняння Ейлера)

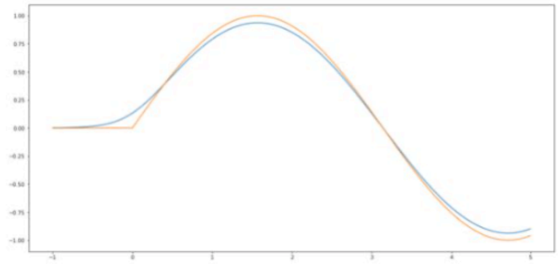
$$x^2y'' + xy' + y = 0,\ x = e^t \longrightarrow y''|_{x=e^t} + y|_{x=e^t} = 0$$

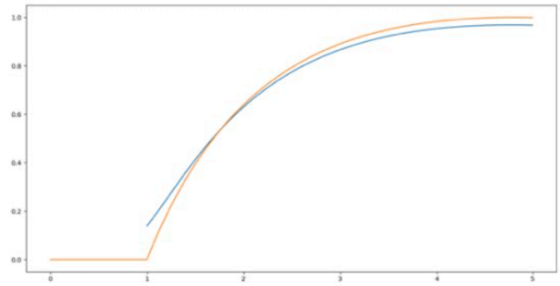
$$f_n(x) = \frac{ne^{-nx}}{(1+e^{-nx})^2}$$

$$y_f = sin(ln(x))H(ln(x)).$$

Справжній розв’язок

Доводиться, що заміна у рівнянні Ейлера працює і в узагальненому випадку





Приклад (Оператор Лапласа)

$$[\varphi_n] = [\psi_n] \qquad \exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \{F_n(x)\}, \{G_n(x)\} :$$

$$F_n(x) \rightrightarrows \leftleftarrows G_n(x), \frac{\partial^k, \ldots \partial^k}{\partial^k x_1, \ldots \partial^k x_m} F_n(x) = \varphi_n(x), \frac{\partial^k, \ldots \partial^k}{\partial^k x_1, \ldots \partial^k x_m} G_n(x) = \psi_n(x)$$

Узагальнення на випадок функцій кількох аргументів

Далі аналогічним чином будуються узагальнені функції

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = \delta(x, y)$$

$$(\frac{\partial^2 U_n}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 U_n}{\partial^2 y}) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{y_1} F_n(x_1, y_1) dx dx_1 dy dy_1$$

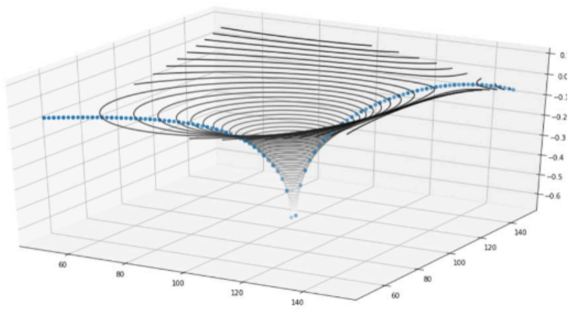
Виснажлива процедура подвійного інтегрування по куту (Як і у звичайному випадку треба мати справу додатково із многочленом, правою частиною, можна довести, що це також буде многочлен вигляду, описаного нижче, а отже при змішаному диференціюванні двічі - зникає)

$$\Delta\psi = \sum_{k=0}^{n} A_k x^{n-k} y^k \longrightarrow \psi = \sum_{k=0}^{n} P_k x^{n-k+2} y^k$$

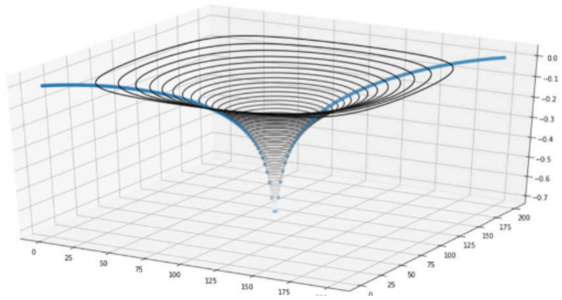
$$f_n(x, y) = \begin{cases} \frac{n^2}{4}, & max\{|x|, |y|\} < \frac{1}{n} \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

Щонайбільш проста послідовність відповідає рівномірному розподілу в квадраті

Приклад (Оператор Лапласа продовження)



Наближення при n=5



Справжній розв'язок

17

Чисельний алгоритм пошуку розв'язку (лінійного гомогенного диф. рі-ння)

1) Вибрати фундаментальну послідовність, що задає праву частину (з урахуванням властивостей рівняння, а саме кратність коренів. для рівнянь у часткових похідних це будуть многочлени двох змінних)
2) Віднайти фундаментальний розв'язок, користуючись описаним вище способом для достатньо великого номера n.
3) Відновити послідовність, користуючись многочленами Чебишева чи Бернштейна.
4) Виконуючи згортку із многочленом (на обмеженому промужку) будемо маємо змогу отримати наближення довільного розв'язку.

18

Еквівалентність функціонального та секвенціального підходів

Секвенціальний -> Функціональний

$$< f, \varphi > = \forall \varphi \in D(A) : \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\varphi(x)dx = \lim_{n\to\infty} (-1)^k \int_{-\infty}^{\infty} F_n(x)\varphi^{(k)}(x)dx,$$

Секвенціальний <- Функціональний

[-1, 1]

$$\alpha_m(x) = m\alpha(m(x-t))$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x)dx = 1$$

$$< f, \varphi > = \lim_{m\to\infty} (g_m * \varphi), \quad g_m(x) = < f, \alpha_m > ,$$

$$g_m * \varphi = < f, \varphi_m > ,$$

$$< f, \varphi_m > \to < f, \varphi >$$

$$g_m * \varphi \to < f, \varphi >$$

Переваги та недоліки

Севенціальний

Переваги:

1) Простота теоретичних викладок;
2) Більш наочний;
3) Більш прикладний.

Недоліки:

1) невелика кількість досліджень;
2) Менш універсальний.

Функціональний

Переваги:

1) Гарно теоретично пропрацьований;
2) Більш універсальний;

Недоліки:

1) Технічна складність

Висновки

В результаті було:

1) Досліджено секвенціальний підхід, зокрема виокремлено недоліки переваги його в порівнянні із функціональним;
2) Побудовано відповідність між двома підходами;
3) Введено поняття диф. рівняння в секвенціальному сенсі.
4) Запропоновано підхід до чисельного пошуку фундаментального розв'язку та ,в цілому, узагальненого розв'язку.

21

Перспективи подальших досліджень

В подальшому планується:

1) Дослідити використання отриманих підходів до лінійних диф. рівнянь із несталими коефіцієнтами (нескінченно-диференційовними принаймні);
2) Більш ретельно опрацювати теорію секвенціального підходу із можливим виділенням інших прикладних аспектів;
3) Створення повноцінного програмного забезпечення для роботи із узагальненими функціями

22


ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!
SCIENTIA
· EST ·
POTENTIA
23